

Обобщение и микроскопическое обоснование материально-полевой формы уравнения Ландау–Лифшица для антиферромагнетиков

П.А. Андреев^{1, *}

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра общей физики

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 04.09.2025; после доработки 21.09.2025; подписана в печать 30.09.2025)

Представлен вывод уравнений Ландау–Лифшица для антиферромагнетиков с двумя сортами магнитных ионов разной массы. Обсуждается вклад различия потенциалов взаимодействия разных подсистем (различие масс, потенциалов и магнитных моментов соответствует ферромагнетикам). Вывод обменного взаимодействия и вклада энергии анизотропии основан на использовании x, y, z модели. Рассмотрен вклад взаимодействия Дзялошинского–Мория. Исследуются два режима возникновения взаимодействия Дзялошинского–Мория: один обусловлен нарушением симметрии инверсии в решетке и второй связан с существованием (и смещением) иона лиганда, в качестве которого выступает ион кислорода. Кроме того, учтена возможность анизотропии взаимодействия Дзялошинского–Мория.

PACS: 02.65.Ca, 75.10.-b УДК: 53.01

Ключевые слова: магнитоупорядоченные среды, уравнение Ландау–Лифшица, анизотропия взаимодействия Дзялошинского–Мория, квантовая гидродинамика, связь микро и макро моделей.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80.2560101](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2560101)

ВВЕДЕНИЕ

Использование уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта по-прежнему является актуальным методом описания макроскопических процессов в магнитоупорядоченных средах. Существует методология, позволяющая получить макроскопические уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта, исходя из уравнений эволюции отдельных магнитных моментов [1], которая, в частности, применима к взаимодействию Дзялошинского–Мория [2]. Также была предложена методология «квантовой гидродинамики» [3], [4] к выводу макроскопического уравнения Ландау–Лифшица со строгим введением материально-полевых переменных (см. для вывода обменного взаимодействия для ферромагнетиков [5], см. для вывода обменного взаимодействия для антиферромагнетиков [6]). Также в работах [5, 6] был охарактеризован набор приближений, приводящий к известному результату. Обобщение спин-токовой модели поляризации мультиферроиков (в случае когда она связана с намагниченностью) и вывод уравнения эволюции поляризации также выполнены методом квантовой гидродинамики [7].

Иллюстрация вывода макроскопического уравнения Ландау–Лифшица на примере ферромагнитных материалов, исходя из динамики отдельных классических магнитных моментов, находящихся неподвижно в узлах кристаллической решетки,

представлена в обзорной статье [1]. В обзоре рассмотрен вывод обменного взаимодействия и вклада энергии анизотропии. Отметим, что оба вклада появляются из обобщенного гамильтониана Гейзенберга, а именно случая, когда обменный интеграл различен при произведении разных проекций спинов $H_{xyz} = J_{xx}S_1^xS_2^x + J_{yy}S_1^yS_2^y + J_{zz}S_1^zS_2^z$ (модель, также называемая в литературе x, y, z моделью). В случае одноосного кристалла это можно упростить, выделяя вклад симметричного гамильтониана Гейзенберга $H = J_0\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \tilde{\kappa}S_1^zS_2^z$, где $\tilde{\kappa} \equiv J_{zz} - J_0$.

Современный систематический анализ макроскопической модели антиферромагнетиков актуален в связи с тем, что активно исследуемые в последние годы вещества, называемые мультиферроиками, в большинстве, если не все, являются антиферромагнетиками [8–13]. Среди мультиферроиков встречаются соединения, в которых одних из двух магнитных ионов является редкоземельным элементом. Поэтому разумно предположить, что обменный интеграл (его модуль) для взаимодействия пар ионов $3d$ -спин ион– $3d$ -спин ион, $4f$ -спин ион– $4f$ -спин ион, $3d$ -спин ион– $4f$ -спин ион будет различен. Соответствующее макроскопическое уравнение Ландау–Лифшица получено в представленной работе.

Представлен систематический вывод обменного взаимодействия, вклада энергии анизотропии, взаимодействия Дзялошинского–Мория, при этом особое внимание уделяется вкладу анизотропии во взаимодействие Дзялошинского–Мория, для антиферромагнетиков (и любых других многокомпонентных магнитоупорядоченных систем). Учтена раз-

* E-mail: andreevpa@physics.msu.ru

ность разности масс частиц разного сорта (этот эффект не даёт вклада в конечные уравнения в рассматриваемом приближении). Также учтено различие модулей «потенциалов» взаимодействия частиц разного сорта, т.е. для пар AA , BB , AB , если система состоит из частиц двух сортов, обозначенных как A и B . Однако затухание Гильберта остаётся за рамками данного исследования.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ–ЛИФШИЦА

1.1. Основные положения

Частично вывод уравнения Ландау–Лифшица для антиферромагнетиков методом квантовой гидродинамики, позволяющей получить полевую форму этого уравнения, рассматривался в работе [6]. Там рассмотрен вывод обменной части, а также вывод спин-токовой модели поляризации. Кроме того, в работе [6] не учтено различие масс частиц двух сортов магнитных атомов/ионов, образующих антиферромагнетик. Здесь мы повторно рассмотрим вклад обменного взаимодействия, учитывая различие масс атомов разных сортов, а также выведем вклад энергии анизотропии и взаимодействия Дзялошинского–Мория.

Для получения уравнений квантовой гидродинамики определим физическую величину, эволюцию которой мы хотим рассмотреть. Мы рассматриваем плотность спина частиц одного сорта:

$$\mathbf{S}_{Sp}(\mathbf{r}, t) = \int \Psi_S^\dagger(R, t) \sum_{i \in Sp} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) (\hat{\mathbf{s}}_i \Psi(R, t))_S dR, \quad (1)$$

где \mathbf{r} и t — это координата и время, индекс Sp показывает сорт рассматриваемых частиц. Мы условно рассмотрим частицы сортов A и B , $\int dR = d^3r_1 \cdot d^3r_2 \cdot \dots \cdot d^3r_N$ — это элемент объёма в $3N$ -мерном конфигурационном пространстве, N — полное число частиц в системе, $\Psi(R, t)_S = \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)_S$ — многочастичная волновая функция (волновой спинор) в координатном представлении, $S = \{s_1, \dots, s_N\}$ — спиновые индексы частиц, по умолчанию подразумевается суммирование по спиновым индексам наряду с интегрированием по конфигурационному пространству, Ψ_S^\dagger — эрмитово сопряженный волновой спинор, $\hat{\mathbf{s}}_i$ — оператор спина для частиц произвольного спина. Представленный вывод с переходом к приближению среднего поля на последнем этапе вычислений опирается только на использование коммутационного соотношения для спинов. Поэтому значение спина частиц каждого из сортов не уточняется. Так как мы рассматриваем систему из двух сортов частиц (ионов), то индексы нумерующие частицы, пробегает следующие значения $i \in [1, N_A] \cup [N_A + 1, N_A + N_B]$. Таким образом, сначала идут частицы сорта A , потом частицы сорта B . Обозначение вида $\sum_{i \in Sp}$ подразумевает

суммирование по частицам фиксированного сорта Sp , т.е. либо по сорту A ($\sum_{i \in A}$), либо по сорту B .

Рассмотрим эффективный гамильтониан взаимодействия магнитных ионов, возникающий как обобщение обменного интеграла кулоновского взаимодействия двух частиц со спином $1/2$ $\hat{H} = -(1/2) \sum_{i,j,j \neq i} J_{ij}^{\alpha\beta} \hat{\mathbf{s}}_i^\alpha \hat{\mathbf{s}}_j^\beta$, где $J_{ij}^{\alpha\beta}$ — матрица, зависящая от разности радиус-векторов i -й и j -й частиц. Произвольную матрицу можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц $J_{ij}^{\alpha\beta} = U_{ij}^{\alpha\beta} + D_{ij}^{\alpha\beta}$. Симметричную часть $U_{ij}^{\alpha\beta} = U_{ij}^{\beta\alpha} = U_{ji}^{\alpha\beta}$ можно диагонализировать соответствующим выбором осей. Антисимметричную часть $D_{ij}^{\alpha\beta} = -D_{ij}^{\beta\alpha} = -D_{ji}^{\alpha\beta}$ можно представить через псевдовектор $D_{ij}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} D_{ij}^\gamma$, который также антисимметричен относительно перестановки индексов номера частиц $D_{ij}^\gamma = -D_{ji}^\gamma$. В итоге мы получаем следующий гамильтониан:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,j \neq i} (U_{ij}^{xx} \hat{s}_i^x \hat{s}_j^x + U_{ij}^{yy} \hat{s}_i^y \hat{s}_j^y + U_{ij}^{zz} \hat{s}_i^z \hat{s}_j^z) - \frac{1}{2} \sum_{i,j,j \neq i} \mathbf{D}_{ij} \cdot [\hat{\mathbf{s}}_i \times \hat{\mathbf{s}}_j]. \quad (2)$$

Первая группа слагаемых, относящаяся к симметричной части обменной матрицы, иногда называется гамильтонианом x, y, z -модели. Последнее слагаемое — это взаимодействие Дзялошинского–Мория.

Приведём вид коммутатора спиновых матриц

$$[\hat{s}_i^\alpha, \hat{s}_j^\beta] = i\hbar \delta_{ij} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \hat{s}_i^\gamma, \quad (3)$$

где α, β, γ — тензорные индексы, которые принимают следующие значения x, y, z , подразумевается суммирование по повторяющимся греческим индексам, i — мнимая единица $i^2 = -1$, δ_{ij} — трехмерный символ Кронекера, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ — трехмерный символ Леви–Чивиты.

1.2. Вывод уравнения эволюции спина под действием симметричной части гамильтониана Гейзенберга

Рассматривая симметричную часть гамильтониана Гейзенберга, ограничимся первым слагаемым в гамильтониане (2)

$$\hat{H}_{xx} = -\frac{1}{2} \sum_{n,k,k \neq n} U_{nk}^{xx} \hat{s}_n^x \hat{s}_k^x \quad (4)$$

для описания основных шагов. При необходимости соберём вклады трёх первых слагаемых в гамильтониане (2), чтобы сформулировать промежуточные итоги. Суммирование по индексам n и k выполняется в диапазоне всех частиц, входящих в рассматриваемую систему $[1, N_A] \cup [N_A + 1, N_A + N_B]$. Таким образом, данный гамильтониан описывает взаимодействие частиц внутри каждой подсистемы и взаимодействие частиц разных подсистем.

Для вывода уравнения эволюции спина (векторного поля плотности спина) надо продифференцировать плотность спина (1) по времени. Эта производная действует на волновые функции, находящиеся под интегралом. Производная волновой функции по времени выражается через Гамильтониан в соответствии с нестационарным уравнением Шредингера/Паули $i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$.

Эта операция может быть рассмотрена отдельно для разных слагаемых Гамильтониана. Это приводит к следующему выражению

$$\partial_t S_A^\alpha = \frac{i}{\hbar} \int dR \sum_{i=1}^{N_A} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Psi^\dagger [\hat{H}_{xx}, \hat{S}_i^\alpha] \Psi. \quad (5)$$

Представим результат вычисления коммутатора

$$[\hat{H}_{xx}, \hat{S}_i^\alpha] = -i\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \sum_{n \neq i} U_{ni}^{xx} \hat{S}_n^\gamma \hat{S}_i^\beta. \quad (6)$$

Отметим, что суммирование по индексу i идёт по частицам одного сорта A , а суммирование по индексу n идёт по частицам всех сортов.

Запишем соответствующую правую часть уравнения эволюции спина с разбиением на взаимодействие разных сортов:

$$\begin{aligned} \partial_t S_A^\alpha = & \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int dR \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{n=1, n \neq i}^{N_A} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) U_{ni}^{xx} \Psi^\dagger \hat{S}_n^\gamma \hat{S}_i^\beta \Psi + \\ & + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int dR \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{n=1+N_A}^{N_A+N_B} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) U_{ni}^{xx} \Psi^\dagger(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, t) \times \hat{S}_n^\gamma \hat{S}_i^\beta \Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, t), \quad (7) \end{aligned}$$

где в последнем слагаемом явно показаны аргументы волновой функции. Два представленных слагаемых имеют одинаковую структуру. Поэтому можно ограничиться рассмотрением только второго слагаемого. Первым шагом учтём короткодействие обменного интеграла U_{ni}^{xx} . Учёт взаимодействия между ближайшими соседями соответствует учёту взаимодействия частиц разного сорта. Но взаимодействие частиц одного сорта тоже учитывается (первым слагаемым). Чтобы учесть, что подынтегральное выражение быстро спадает с ростом относительного расстояния между двумя частицами, за счёт быстрого убывания функции U_{ni}^{xx} , необходимо явно ввести относительное расстояние вместо векторов \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_n . Соответственно вводим координаты относительного расстояния $\mathbf{r}_{in} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n$ и центра масс $\mathbf{R}_{in} = (m_i \mathbf{r}_i + m_n \mathbf{r}_n)/(m_i + m_n)$ пары частиц с номерами i и n . Выполним разложение дельта функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, волновой функции $\Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n, \dots)$, и эрмитово-сопряженной волновой функции Ψ^\dagger . Эти разложения нужно выполнить с точностью до второго порядка по относительному расстоянию \mathbf{r}_{in} :

дельного расстояния между двумя частицами, за счёт быстрого убывания функции U_{ni}^{xx} , необходимо явно ввести относительное расстояние вместо векторов \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_n . Соответственно вводим координаты относительного расстояния $\mathbf{r}_{in} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n$ и центра масс $\mathbf{R}_{in} = (m_i \mathbf{r}_i + m_n \mathbf{r}_n)/(m_i + m_n)$ пары частиц с номерами i и n . Выполним разложение дельта функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, волновой функции $\Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n, \dots)$, и эрмитово-сопряженной волновой функции Ψ^\dagger . Эти разложения нужно выполнить с точностью до второго порядка по относительному расстоянию \mathbf{r}_{in} :

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = & \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in} - \frac{m_n \mathbf{r}_{in}}{m_i + m_n}\right) \approx \\ & \approx \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in}) - \frac{m_n}{m_i + m_n} r_{in}^\gamma \partial^\gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in}) + \frac{1}{2} \left(\frac{m_n}{m_i + m_n}\right)^2 r_{in}^\gamma r_{in}^\delta \partial^\gamma \partial^\delta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in}) \quad (8) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Psi = & \Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n, \dots) = \Psi\left(\dots, \mathbf{R}_{in} + \frac{m_n \mathbf{r}_{in}}{m_i + m_n}, \dots, \mathbf{R}_{in} - \frac{m_i \mathbf{r}_{in}}{m_i + m_n}, \dots\right) \approx \\ & \approx \left(\Psi(\dots, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_2, \dots) + \frac{1}{m_i + m_n} r_{in}^\gamma (m_n \partial_{R_1}^\gamma - m_i \partial_{R_2}^\gamma) \Psi(\dots, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_2, \dots) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2(m_i + m_n)^2} r_{in}^\gamma r_{in}^\delta (m_n \partial_{R_1}^\gamma - m_i \partial_{R_2}^\gamma)(m_n \partial_{R_1}^\delta - m_i \partial_{R_2}^\delta) \Psi(\dots, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_2, \dots) \right)_{\mathbf{R}_1=\mathbf{R}_2=\mathbf{R}_{in}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое, возникающее в нулевом порядке разложения второго слагаемого в уравнении (7)

$$\partial_t S_{A,0th}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int dR \sum_{i \in A} \sum_{n \in B} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in}) U_{ni}^{xx} \Psi^\dagger(R') \hat{S}_n^\gamma \hat{S}_i^\beta \Psi(R') \approx \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int U_{AB}^{xx}(\tilde{\mathbf{r}}) d^3 \tilde{\mathbf{r}} \cdot S_B^\gamma S_A^\beta, \quad (10)$$

где введены сокращённое обозначение для аргумента волновой функции $R' = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{R}_{in}, \dots, \mathbf{R}_{in}, \dots, \mathbf{r}_N\}$ и плотность спина (1) через одночастичные волновые функции $S_A^\alpha(\mathbf{r}, t) = \psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{S}_{1(A)}^\alpha \psi_{s_1}(\mathbf{r}, t)$. Введем в данном уравнении константу взаимодействия нулевого порядка $g_{0,u,AB}^{xx} \equiv \int U_{AB}^{xx}(\tilde{r}) d^3\tilde{r}$.

Слагаемые, возникающие в первом порядке раз-

ложения второго слагаемого в уравнении (7), обращаются в ноль в силу того, что интеграл по относительному расстоянию, дающий константу взаимодействия, равен нулю.

Далее рассмотрим слагаемые, возникающие во втором порядке разложения второго слагаемого в уравнении (7):

$$\begin{aligned} \partial_t S_{A,2th}^\alpha = & \varepsilon^{\alpha\beta x} \int dR \sum_{i \in A} \sum_{n \in B} \frac{r_{in}^\mu r_{in}^\nu U_{ni}^{xx}}{2(m_A + m_B)^2} \times \left[m_B^2 (\partial^\mu \partial^\nu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in})) \Psi^\dagger(R') \hat{S}_n^x \hat{S}_i^\beta \Psi(R') - \right. \\ & - 2m_B (\partial^\nu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in})) \times (\Psi^\dagger(R') \hat{S}_n^x \hat{S}_i^\beta (m_B \partial_{R1}^\mu - m_A \partial_{R2}^\mu) \Psi(R') + h.c.) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in}) (\Psi^\dagger(R') \hat{S}_n^x \hat{S}_i^\beta \times \\ & \times (m_B \partial_{R1}^\mu - m_A \partial_{R2}^\mu) (m_B \partial_{R1}^\nu - m_A \partial_{R2}^\nu) \Psi(R') + h.c.) + 2\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in}) ((m_B \partial_{R1}^\mu - m_A \partial_{R2}^\mu) \Psi^\dagger(R')) \times \\ & \left. \times \hat{S}_n^x \hat{S}_i^\beta (m_B \partial_{R1}^\mu - m_A \partial_{R2}^\mu) \Psi(R') \right], \quad (11) \end{aligned}$$

где $h.c.$ — эрмитово сопряжение.

Приведём результат преобразования каждого из четырёх слагаемых, представленных в предыдущем выражении (последние два сгруппированы вместе):

$$\begin{aligned} \partial_t S_{A,2th}^\alpha = & \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta x} g_{2,u,AB}^{xx} \left[\frac{1}{2} \frac{m_B^2}{(m_A + m_B)^2} \Delta(S_B^x S_A^\beta) - \frac{m_B}{(m_A + m_B)^2} \partial^\mu [m_B S_B^x \partial^\mu S_A^\beta - m_A S_A^\beta \partial^\mu S_B^x] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{(m_A + m_B)^2} [m_A^2 S_A^\beta \Delta S_B^x + m_B^2 S_B^x \Delta S_A^\beta - 2m_A m_B (\partial^\mu S_B^x) \partial^\mu S_A^\beta] \right], \quad (12) \end{aligned}$$

$g_{2,u,AB}^{xx} = \int \tilde{r}^2 U_{AB}^{xx}(\tilde{r}) d^3\tilde{r}$ — константа взаимодействия, возникающая в втором порядке разложения.

Сгруппировав полученные выражения, получим, что вклад различных масс сокращается:

$$\partial_t S_{A,2th}^\alpha = \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta x} g_{2,u,AB}^{xx} S_A^\beta \Delta S_B^x. \quad (13)$$

1.3. Вывод уравнения эволюции спина под действием взаимодействия Дзялошинского–Мория

Гамильтониан взаимодействия Дзялошинского–Мория можно переписать в следующем виде:

$$\hat{H}_{DMI} = -\frac{1}{2} \sum_{n,k,k \neq n} \beta_{0,nk}^{\beta\gamma} r_{nk}^\gamma \varepsilon^{\beta\mu\nu} \hat{S}_n^\mu \hat{S}_k^\nu, \quad (14)$$

где $\beta_{0,nk}^{\beta\gamma} = \gamma_{nk}(r_{nk}) \delta^{\beta\gamma} + \beta_{nk}(r_{nk}) \varepsilon^{\beta\gamma\delta} \delta^\delta$. Вид функции β_0 и наличие двух вкладов обсуждается в работе [14] (см. также [15]). Первое слагаемое, пропорциональное функции γ , приводит к свободной энергии, представленной в 8-м томе курса теоретической физики Ландау–Лифшица (см. § 52). Второе слагаемое связано с существованием немагнитного иона лиганда, где вектор δ описывает смещение этого иона относительно линии, соединяющей

ближайшие магнитные ионы. Нечетность константы Дзялошинского $D_{nk}^\beta = \beta_{0,nk}^{\beta\gamma} r_{nk}^\gamma$ относительно перестановки частиц учтена в виде явно вынесенного множителя r_{nk}^γ . Следовательно, функции $\gamma_{nk}(r_{nk})$ и $\beta_{nk}(r_{nk})$, а вместе с ними тензор $\beta_{0,nk}^{\beta\gamma}$, должны быть чётными относительно перестановки частиц. Такая структура константы Дзялошинского D_{nk}^β , особенно второе слагаемое, связанное с ионом лиганда, носит название формулы Кеффера [14, 16].

Вклад взаимодействия Дзялошинского–Мория в уравнение эволюции спина частиц сорта A определяется коммутатором операторов спина отдельных частиц этого сорта с Гамильтонианом всей системы частиц:

$$\partial_t S_A^\alpha = \frac{i}{\hbar} \int dR \sum_{i=1}^{N_A} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Psi^\dagger [\hat{H}_{DMI}, \hat{S}_i^\alpha] \Psi. \quad (15)$$

Этот коммутатор может быть представлен в следующем виде

$$[\hat{H}_{DMI}, \hat{S}_i^\alpha] = -i\hbar \sum_{n \neq i} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} \beta_{0,ni}^{\mu\sigma} r_{ni}^\sigma \hat{S}_n^\nu \hat{S}_i^\beta, \quad (16)$$

где суммирование по индексу $n \in [1, N_A] \cup [N_A + 1, N_A + N_B]$ выполняется по всем сортам частиц. Таким образом, возникают две группы слагаемых:

взаимодействие частиц подсистемы A , а также взаимодействие частиц сорта A с частицами сорта B .

Далее переходим к учёту короткодействующего характера взаимодействия Дзялошинского–Мория. Для этого вводим координаты относительного рас-

стояния $\mathbf{r}_{in} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n$ и центра масс $\mathbf{R}_{in} = (m_i \mathbf{r}_i + m_n \mathbf{r}_n)/(m_i + m_n)$ пары частиц с номерами i и n . Разложение дельта функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, волновой функции $\Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n, \dots)$ и эрмитово-сопряженной волновой функции Ψ^\dagger выполняем с точностью до первого порядка по относительному расстоянию \mathbf{r}_{in} :

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in} - m_n \mathbf{r}_{in}/(m_i + m_n)) \approx \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in}) - (m_n/(m_i + m_n)) r_{in}^\gamma \partial^\gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in}) + \dots \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n, \dots) = \Psi(\dots, \mathbf{R}_{in} + m_n \mathbf{r}_{in}/(m_i + m_n), \dots, \mathbf{R}_{in} - m_i \mathbf{r}_{in}/(m_i + m_n), \dots) \approx \\ &\approx \left(\Psi(\dots, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_2, \dots) + (1/(m_i + m_n)) r_{in}^\gamma \times (m_n \partial_{R_1}^\gamma - m_i \partial_{R_2}^\gamma) \Psi(\dots, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_2, \dots) \right)_{\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{in}} + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляем коммутатор (16) в уравнение (15), а также подставляем туда описанные разложения, сохраняя в произведении $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \Psi^\dagger \cdot \Psi$ слагаемые до первого порядка по относительному расстоянию. В итоговом выражении имеет место разделение координат относительного движения пары частиц, координат центра масс пары частиц, от координат оставшихся $N - 2$ частиц. Используя приближение мультипликативности для волновой функции без симметризации одночастичных волновых функций и выполняя интегрирование по координатам оставшихся $N - 2$ частиц, которые обращаются в единицу как нормировочные интегралы, получаем произведение двух сомножителей. Один сомножитель содержит интеграл по относительной координате, включающий координатную зави-

симость эффективного потенциала. В оставшейся части интеграл по \mathbf{R}_{in} берется за счёт дельта-функции $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{in})$ и остаётся вклад одночастичных волновых функций, записанных как функции координаты \mathbf{r} .

Слагаемое, возникающее в нулевом порядке разложения по относительному расстоянию, оказывается пропорциональным интегралам вида $\int \beta(r_{in}) \mathbf{r}_{in} d^3 r_{in}$, которые равны нулю для изотропной функции $\beta(r_{in})$ или в случае «минимально» не изотропной функции $\beta(\sqrt{x_{in}^2 + y_{in}^2}, z_{in})$, соответствующей цилиндрической симметрии взаимодействия. Подробнее рассмотрим слагаемые в первом порядке разложения (на примере взаимодействия частиц разного сорта):

$$\begin{aligned} \partial_t S_A^\alpha &= \int \beta_0^{\alpha\beta}(\tilde{r}) \tilde{r}^\beta \tilde{r}^\gamma d^3 \tilde{r} \cdot \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \varepsilon^{\sigma\delta\nu} \left(\frac{m_B}{m_A + m_B} \times \partial^\gamma [\psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{S}_{2(B)}^\mu \hat{S}_{1(A)}^\delta \psi_{s_1}(\mathbf{r}, t) \psi_{s_2}(\mathbf{r}, t)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m_A + m_B} [\psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{r}, t) (m_B \partial_{R_1}^\gamma - m_A \partial_{R_2}^\gamma) \times \hat{S}_{2(B)}^\mu \hat{S}_{1(A)}^\delta \psi_{s_2}(\mathbf{r}_2, t) \psi_{s_1}(\mathbf{r}_1, t) + h.c.]_{\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $h.c.$ — эрмитово сопряженное слагаемое. Первое слагаемое возникает от разложения дельта-функции в первом порядке, а волновых функций — в нулевом порядке соответственно. Второе слагаемое возникает от разложения одной из волновых функций в первом порядке, а второй волновой функции и дельта-функции — в нулевом порядке соответ-

ственно. Для дальнейшей интерпретации полученного выражения запишем приближенное выражение для плотности спина (1) с волновой функцией, рассмотренной в приближении мультипликативности $S_A^\alpha(\mathbf{r}, t) = \psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{S}_{1(A)}^\alpha \psi_{s_1}(\mathbf{r}, t)$. В итоге рассматриваемое выражение перепишем через плотность спина:

$$\begin{aligned} \partial_t S_A^\alpha &= \int \beta_0^{\alpha\beta}(\tilde{r}) \tilde{r}^\beta \tilde{r}^\gamma d^3 \tilde{r} \cdot \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \varepsilon^{\sigma\delta\nu} \frac{1}{m_A + m_B} \times [m_B \partial^\gamma (S_B^\mu(\mathbf{r}, t) S_A^\delta(\mathbf{r}, t)) + (m_A S_A^\delta(\mathbf{r}, t)) \partial^\gamma S_B^\mu(\mathbf{r}, t) - \\ &\quad - m_B S_B^\mu(\mathbf{r}, t) \partial^\gamma S_A^\delta(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Далее, раскрываем производную от произведения плотностей спина, сокращаем массы и упрощаем интеграл от β_0 функции с учётом симметрии её ар-

гумента. Получаем итоговое выражение для момента силы изотропного взаимодействия Дзялошин-

ского–Мория между частицами разного сорта:

$$\partial_t S_{A,DMI}^{\alpha} = \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} \times \\ \times S_{A}^{\beta} [g_{(\gamma),2,AB} \partial^{\mu} + g_{(\beta),2,AB} \varepsilon^{\mu\sigma\lambda} \delta^{\lambda} \partial^{\sigma}] S_{B}^{\nu}. \quad (21)$$

Здесь введены две константы взаимодействия

$$g_{(\gamma),2,AB} = \int r^2 \gamma_{AB}(r) d^3 r, \quad g_{(\beta),2,AB} = \int r^2 \beta_{AB}(r) d^3 r. \quad (22)$$

Для взаимодействия частиц сорта A нужно положить $g_{(\gamma),2,AB} \rightarrow g_{(\gamma),2,AA}$, $g_{(\beta),2,AB} \rightarrow g_{(\beta),2,AA}$, $S_B^{\nu} \rightarrow S_A^{\nu}$. Сравнение модулей и знаков констант взаимодействия представим ниже при объединении всех парциальных вкладов в одно уравнение.

1.4. Момент силы, обусловленный анизотропной частью взаимодействия Дзялошинского–Мория

Константа взаимодействия во вкладе взаимодействия Дзялошинского–Мория в момент силы возникает в результате интегрирования следующего тензора второго ранга:

$$g_{(\beta)}^{\beta\gamma} = \int \beta(\mathbf{r}) r^{\beta} r^{\gamma} d^3 r. \quad (23)$$

Выше предполагалось, что функция $\beta(\mathbf{r})$ зависит только от модуля расстояния. Это соответствовало изотропной части взаимодействия Дзялошинского–Мория. Для учёта анизотропии рассмотрим зависимость вида $\beta = \beta(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, |z|) = \beta(r, \theta)$. Тогда функцию β можно разложить по сферическим функциям $Y_{l0}(\cos \theta)$, $l \in [0, \infty)$, где зависимость от угла φ отсутствует. Предварительно рассмотрим оставшуюся часть подынтегрального выражения $r^{\beta} r^{\gamma}$. Так как $\beta(\mathbf{r})$ не зависит от угла φ , то можно проинтегрировать подынтегральное выражение по углу φ . Тогда останутся только диагональные элементы, перечислим их: $\int \beta(r, \theta) r^2 (\sin^2 \theta / 2) d^3 r$, $\int \beta(r, \theta) r^2 (\sin^2 \theta / 2) d^3 r$, $\int \beta(r, \theta) r^2 \cos^2 \theta d^3 r$ (интеграл по углу φ восстановлен в этих выражениях). Выразим $\cos^2 \theta = Y_{00}/(3c_{00}) + Y_{20}/(3c_{20})$. Также выразим $\sin^2 \theta / 2 = [2Y_{00}/(3c_{00}) - Y_{20}/(3c_{20})]/2$, где $c_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$, $c_{20} = \sqrt{5}/2\sqrt{4\pi}$ это нормировочные константы сферических функций. Мы видим, что

нам важны только два члена разложения функции $\beta(r, \theta) = \sqrt{4\pi}(\beta_{00}(r)Y_{00} + \beta_{20}(r)Y_{20})$. Постоянный множитель $\sqrt{4\pi}$ использован, чтобы функция $\beta_{00}(r)$ совпадала с ранее введённой изотропной функцией $\beta(r)$. Перечисленные выше интегралы для диагональных элементов получаются в следующем виде:

$$\hat{g}_{(\beta)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \int \beta_{00}(r) r^2 d^3 r + \\ + \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \int \beta_{20}(r) r^2 d^3 r. \quad (24)$$

Первое слагаемое соответствует симметричному вкладу рассмотренному выше. Второе слагаемое даёт вклад анизотропии. Аналогично можно получить вклад функции $\gamma(\mathbf{r})$. Представим конечный вид дополнительного момента силы, обусловленного анизотропией:

$$T^{\alpha} = \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S_A^{\beta} \left[-\varepsilon^{\gamma\nu\mu} [\sigma \partial_x + \sigma' \varepsilon^{x\sigma\lambda} \delta^{\lambda} \partial^{\sigma}] - \right. \\ \left. - \varepsilon^{\gamma\nu\mu} [\sigma \partial_y + \sigma' \varepsilon^{y\sigma\lambda} \delta^{\lambda} \partial^{\sigma}] + \right. \\ \left. + 2\varepsilon^{\gamma z\nu} [\sigma \partial_z + \sigma' \varepsilon^{z\sigma\lambda} \delta^{\lambda} \partial^{\sigma}] \right] S_B^{\nu}, \quad (25)$$

где $\sigma = (1/\sqrt{5}) \int \gamma_{20}(r) r^2 d^3 r$ и $\sigma' = (1/\sqrt{5}) \int \beta_{20}(r) r^2 d^3 r$. Сравнивая полученный результат с изотропной частью, мы видим, что можно переобозначить константы взаимодействия как $D_1 = (g_{(\gamma),2} - \sigma)/3$ и $D_2 = (g_{(\gamma),2} + 2\sigma)/3$ (аналогично можно ввести $D'_1 = (g_{(\beta),2} - \sigma')/3$ и $D'_2 = (g_{(\beta),2} + 2\sigma')/3$ для второй части взаимодействия Дзялошинского–Мория). Для сравнения в работах [17–19], рассматриваются плёнки, вырезанные перпендикулярно оси анизотропии. И анизотропия взаимодействия Дзялошинского–Мория магнитных ионов находящаяся в плёнке связана с упругими деформациями. С точностью до замены осей и причин анизотропии можно утверждать, что представленный вывод даёт микроскопическое обоснование этой модели.

1.5. Уравнения эволюции спина антиферромагнетика

Уравнения эволюции спина/намагниченности в антиферромагнетике обычно рассматриваются не для отдельных сортов частиц, а для функций вида $\mathbf{L} = \mathbf{S}_A - \mathbf{S}_B$, $\mathbf{M} = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B$. Соберём результаты вывода отдельных слагаемых в уравнении Ландау–Лифшица, и перейдем в полученном выражении к новым переменным:

$$\begin{aligned}
 \partial_t S_A^\alpha = & g_{0,u,AA}^{xx} \varepsilon^{\alpha\beta x} S_A^\beta S_A^\alpha + g_{0,u,AA}^{yy} \varepsilon^{\alpha\beta y} S_A^\beta S_A^\alpha + g_{0,u,AA}^{zz} \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta S_A^\alpha + g_{0,u,AB}^{xx} \varepsilon^{\alpha\beta x} S_A^\beta S_B^\alpha + \\
 & + g_{0,u,AB}^{yy} \varepsilon^{\alpha\beta y} S_A^\beta S_B^\alpha + g_{0,u,AB}^{zz} \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta S_B^\alpha + \frac{1}{6} \left[g_{2,u,AA}^{xx} \varepsilon^{\alpha\beta x} S_A^\beta \Delta S_A^\alpha + g_{2,u,AA}^{yy} \varepsilon^{\alpha\beta y} S_A^\beta \Delta S_A^\alpha + \right. \\
 & + g_{2,u,AA}^{zz} \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta \Delta S_A^\alpha + g_{2,u,AB}^{xx} \varepsilon^{\alpha\beta x} S_A^\beta \Delta S_B^\alpha + g_{2,u,AB}^{yy} \varepsilon^{\alpha\beta y} S_A^\beta \Delta S_B^\alpha + g_{2,u,AB}^{zz} \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta \Delta S_B^\alpha \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} S_A^\beta \left[[g_{2,(\gamma),AA} \partial^\mu + g_{2,(\beta),AA} \varepsilon^{\mu\delta\lambda} \delta^\lambda \partial^\delta] S_A^\nu + [g_{2,(\gamma),AB} \partial^\mu + g_{2,(\beta),AB} \varepsilon^{\mu\delta\lambda} \delta^\lambda \partial^\delta] S_B^\nu \right]. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Для одноосных кристаллов мы можем положить $g_{0,u,SpSp'}^{xx} = g_{0,u,SpSp'}^{yy} \equiv g_{0,u,SpSp'}$, $g_{0,u,SpSp'}^{zz} = g_{0,u,SpSp'}^{xx} + \kappa_{SpSp'}$, $g_{2,u,SpSp'}^{xx} = g_{2,u,SpSp'}^{yy} \equiv g_{2,u,SpSp'}$,

$g_{2,u,SpSp'}^{zz} = g_{2,u,SpSp'}^{xx} + \kappa_{2,SpSp'}$, где $Sp = A$ или B , $Sp' = A$ или B . Тогда уравнение для $\partial_t S_A^\alpha$ примет более привычный вид:

$$\begin{aligned}
 \partial_t S_A^\alpha = & g_{0,u,AA} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S_A^\beta S_A^\gamma + \kappa_{AA} \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta S_A^\alpha + g_{0,u,AB} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S_A^\beta S_B^\gamma + \kappa_{AB} \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta S_B^\alpha + \\
 & + \frac{1}{6} \left[g_{2,u,AA} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S_A^\beta \Delta S_A^\gamma + \kappa_{2,AA} \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta \Delta S_A^\alpha + g_{2,u,AB} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S_A^\beta \Delta S_B^\gamma + \kappa_{2,AB} \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta \Delta S_B^\alpha \right] + \\
 & + \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} S_A^\beta \left[[g_{2,(\gamma),AA} \partial^\mu + g_{2,(\beta),AA} \varepsilon^{\mu\delta\lambda} \delta^\lambda \partial^\delta] S_A^\nu + [g_{2,(\gamma),AB} \partial^\mu + g_{2,(\beta),AB} \varepsilon^{\mu\delta\lambda} \delta^\lambda \partial^\delta] S_B^\nu \right]. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения равно нулю, но оно сохранено для последующего построения.

В 9-м томе курса теоретической физики Ландау–Лифшица (см. §69) предлагается рассматривать матричную структуру константы взаимодействия перед слагаемыми вида $S_A^\beta \Delta S_A^\gamma$. Однако мы решили явно выделить анизотропную $\kappa_{2,AA}$ и изотропную части $g_{2,u,AA}$, которые, как и анизотропия, появляющаяся в низшем порядке разложения, связаны с использованием x, y, z -модели, в исходном гамильтониане, вместо гамильтониана Гейзенберга со скалярной константой взаимодействия. Отдельно подчеркнём, что анизотропная зависимость обменного интеграла от координат здесь не рассмотрена, но анизотропная зависимость константы Дзялошинского от координат была рассмотрена выше без включения в конечную систему уравнений.

В антиферромагнетике обменное взаимодействие между ближайшими соседями (частицами разного сорта) отличается по знаку от взаимодействия между частицами, которые находятся за ближайшим соседом (частицей того же сорта),

тут предполагается конфигурация типа $ABAB$, хотя возможны другие варианты расположения, к примеру $AABB$. Чтобы получить стандартные для антиферромагнетиков уравнения для величин \mathbf{L} , \mathbf{M} , мы вынуждены сделать дополнительные, достаточно грубые предположения относительно величин констант взаимодействия. А именно, положить

$$\begin{aligned}
 g_{0,u,AA} = g_{0,u,BB} & \equiv g_{0,u}, & g_{0,u,AB} & = -g_{0,u}, \\
 g_{2,u,AA} = g_{2,u,BB} & \equiv g_{2,u}, & g_{2,u,AB} & = -g_{2,u}, \\
 \kappa_{AB} = -\kappa_{AA} = -\kappa_{BB} & = -\kappa, \\
 \kappa_{2,AB} = -\kappa_{2,AA} = -\kappa_{2,BB} & = -\kappa_2, \\
 g_{2,(\gamma),AB} = -g_{2,(\gamma),AA} & = -g_{2,(\gamma),BB} \equiv -g_{2,(\gamma)}, \\
 g_{2,(\beta),AB} = -g_{2,(\beta),AA} & = -g_{2,(\beta),BB} \equiv -g_{2,(\beta)}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что для разных атомов/ионов величина обменного взаимодействия различается и его модуль отличается от величины взаимодействия разных ионов. Особенно это может проявиться, когда один из ионов является ионом редкоземельного элемента. Простой иллюстрацией этой мысли являются разные величины обменных интегралов в разных ферромагнетиках. Далее мы ограничимся простой моделью с описанной здесь связью констант взаимодействия.

В итоге получим:

$$\begin{aligned}
 \partial_t S_A^\alpha = & g_{0,u} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S_A^\beta L^\gamma + \kappa \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta L^z + \frac{1}{6} \left[g_{2,u} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S_A^\beta \Delta L^\gamma + \kappa_2 \varepsilon^{\alpha\beta z} S_A^\beta \Delta L^z + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} S_A^\beta \left[[g_{2,(\gamma)} \partial^\mu + g_{2,(\beta)} \varepsilon^{\mu\delta\lambda} \delta^\lambda \partial^\delta] L^\nu \right] \right]. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Уравнение эволюции спина для частиц второго сорта $\partial_t S_B^\alpha$ получается из представленных выше простой заменой $A \leftrightarrow B$. Складывая (вычитая) уравнения для $\partial_t S_A^\alpha$ и $\partial_t S_B^\alpha$, получим уравнения эволюции для

$$\mathbf{L} = \mathbf{S}_A - \mathbf{S}_B, \mathbf{M} = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B:$$

$$\begin{aligned} \partial_t L^\alpha = g_{0,u} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} M^\beta L^\gamma + \kappa \varepsilon^{\alpha\beta z} M^\beta L^z + \frac{1}{6} \left[g_{2,u} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} M^\beta \Delta L_A^\gamma + \kappa_2 \varepsilon^{\alpha\beta z} M^\beta \Delta L^z + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} M^\beta \left[g_{2,(\gamma)} \partial^\mu + g_{2,(\beta)} \varepsilon^{\mu\delta\lambda} \delta^\lambda \partial^\delta \right] L^\nu \right], \quad (29) \end{aligned}$$

и

$$\partial_t M^\alpha = \kappa \varepsilon^{\alpha\beta z} L^\beta L^z + \frac{1}{6} \left[g_{2,u} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} L^\beta \Delta L_A^\gamma + \kappa_2 \varepsilon^{\alpha\beta z} L^\beta \Delta L^z + \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} L^\beta \left[g_{2,(\gamma)} \partial^\mu + g_{2,(\beta)} \varepsilon^{\mu\delta\lambda} \delta^\lambda \partial^\delta \right] L^\nu \right]. \quad (30)$$

Наряду с представленными в уравнениях (29) и (30) взаимодействиями, в антиферромагнетиках существует дополнительный вклад. Соответствующая плотность энергии пропорциональна векторному произведению векторов \mathbf{L} и \mathbf{M} (см. 8-й том курса теоретической физики Ландау–Лифшица, уравнение 50.1 и уравнения 2 и 3 в работе [21]). С точностью до коэффициента пропорциональности его можно переписать через парциальные плотности спинов $\mathbf{L} \times \mathbf{M}$ или $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2$. При этом плотность энергии содержит векторный постоянный коэффициент \mathbf{n} : $E = (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{L} \times \mathbf{M}])$. Это показывает, что обсуждаемое слагаемое связано с взаимодействием Дзялошинского–Мория, которое пропорционально векторному произведению спиновых операторов. Однако использованная выше структура константы Дзялошинского не даёт возможности получить обсуждаемый вклад и необходимо обобщить форму этой константы с более детальным учётом смещения ионов.

В моделях магнитоупорядоченных сред используются инварианты Лифшица, которые представляют вклад в плотность энергии тензора третьего ранга составленного из двух компонент намагниченности (или антиферромагнитного вектора \mathbf{L}) и компоненты пространственной производной, с соответствующими свёртками и множителями для получения скалярной плотности энергии [22, 23]. В итоге возникают моменты сил, содержащие одну пространственную производную. Иногда инварианты Лифшица интерпретируют в связи с неоднородным магнитоэлектрическим эффектом (см., к примеру, уравнение 5 и текст перед ним в работе [21]), что также подтверждается методом квантовой гидродинамики, с раскрытием механизма его возникновения, а именно комплиментарным действием спин-орбитального взаимодействия и обменного взаимодействия в форме гамильтониана Гейзенберга [24]. Кроме того, моменты сил взаимодействия Дзялошинского–Мория (см. последнее слагаемое в уравнениях (28), (29) и (30)) также имеют структуру, аналогичную вкладу инвариантов Лифшица.

В более общем случае, когда упрощенные соотношения между константами взаимодействия не используются, также можно перейти к переменным $\mathbf{L} = \mathbf{S}_A - \mathbf{S}_B, \mathbf{M} = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B$ путём обратной замены

$$\mathbf{S}_A = (\mathbf{M} + \mathbf{L})/2, \mathbf{S}_B = (\mathbf{M} - \mathbf{L})/2.$$

Еще раз отметим различие атомных свойств ионов, образующих наиболее распространённые соединения, исследуемые в современных лабораториях. Приведём пример мультиферроика с циклоидальной магнитной структурой из обзора [20] TbMnO_3 , включающий два магнитных иона Tb и Mn, где атом тербия Tb — редкоземельный элемент с незаполненной f -подоболочкой $4f^9 6s^2$. Ожидается взаимодействие вида (соответствующие обменные интегралы) Tb–Tb, Tb–Mn, Mn–Mn будут отличаться. Это легко при необходимости учесть в микроскопической модели (2). В приведённом примере поведение системы более сложное. В частности, существует интервал температур, в котором магнитоупорядоченное состояние, дающее антиферромагнитный порядок, формируется только ионами Mn. При более низких температурах магнитоупорядоченное состояние формируется в обеих подсистемах Tb и Mn. Каждая подсистема формирует антиферромагнитный порядок. В этом случае следует рассматривать четырёхкомпонентную систему, к которой можно применить описанные выше уравнения с соответствующими изменениями. Подсистемы из двух разных атомов/ионов могут обладать разными значениями спина и тем более магнитного момента, что приведёт к формированию ферримагнитного состояния, вместо отмеченного в названии работы антиферромагнитного, тогда представленный ниже результат следует скорее интерпретировать как модель ферримагнетика. Приведём актуальный пример формирования антиферромагнетика в системе ионов одного сорта, которую в итоге рассматриваем как два различных сорта за счёт различия только по проекциям спина. Такой пример можно найти в работе [21], где рассмотрены ViFeO_3 -подобные антиферромагнитные мультиферроики. Висмут Vi имеет одну незаполненную подоболочку $6p^3$ и является немагнитным элементом. Железо Fe имеет одну незаполненную подоболочку $3d^6 4s^2$ и является магнитным ионом.

Приведём соответствующие макроскопические уравнения. Ограничимся для этого одноосным кристаллом, но отбросим при этом вклады, описывающие анизотропию в слагаемых содержащих лапласиан плотности спина $\sim \kappa_2$:

$$\begin{aligned}
 \partial_t L^\alpha = & g_{0,u,AB} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} L^\beta M^\gamma + \frac{1}{4} [\kappa_{AA} + \kappa_{BB} + 2 | \kappa_{AB} |] \varepsilon^{\alpha\beta z} M^\beta L^z + \frac{1}{4} [\kappa_{AA} + \kappa_{BB} - 2 | \kappa_{AB} |] \varepsilon^{\alpha\beta z} L^\beta M^z + \\
 & + \frac{1}{4} [\kappa_{AA} - \kappa_{BB}] \varepsilon^{\alpha\beta z} (L^\beta L^z + M^\beta M^z) + \frac{1}{4} \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} [g_{2,u,AA} + g_{2,u,BB} + 2 | g_{2,u,AB} |] M^\beta \Delta L^\gamma + \\
 & + \frac{1}{4} \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} [g_{2,u,AA} + g_{2,u,BB} - 2 | g_{2,u,AB} |] L^\beta \Delta M^\gamma + \frac{1}{4} \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} [g_{2,u,AA} - g_{2,u,BB}] (L^\beta \Delta L^\gamma + M^\beta \Delta M^\gamma) + \\
 & + \frac{1}{4} \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} \left[M^\beta [\hat{g}_{AA} + \hat{g}_{BB} + 2 | \hat{g}_{AB} |] L^\nu + L^\beta [\hat{g}_{AA} + \hat{g}_{BB} - 2 | \hat{g}_{AB} |] M^\nu + L^\beta [\hat{g}_{AA} - \hat{g}_{BB}] L^\nu + M^\beta [\hat{g}_{AA} - \hat{g}_{BB}] M^\nu \right], \quad (31)
 \end{aligned}$$

где в $\hat{g}_{AA} = g_{2,(\gamma),AA} \partial^\mu + g_{2,(\beta),AA} \varepsilon^{\mu\delta\lambda} \delta^\lambda \partial^\delta$ использовано операторное выражение для комбинации производных и констант взаимодействия частиц одного сорта, и $| \hat{g}_{AB} | = | g_{2,(\gamma),AB} | \partial^\mu + | g_{2,(\beta),AB} | \varepsilon^{\mu\delta\lambda} \delta^\lambda \partial^\delta$ — условное операторное выражение для комбинации производных и модулей констант взаимодействия частиц разного сорта.

Приведём второе уравнение системы:

$$\begin{aligned}
 \partial_t M^\alpha = & \frac{1}{4} [\kappa_{AA} + \kappa_{BB} + 2 | \kappa_{AB} |] \varepsilon^{\alpha\beta z} L^\beta L^z + \frac{1}{4} [\kappa_{AA} + \kappa_{BB} - 2 | \kappa_{AB} |] \varepsilon^{\alpha\beta z} M^\beta M^z + \\
 & + \frac{1}{4} \varepsilon^{\alpha\beta z} [\kappa_{AA} - \kappa_{BB}] (M^\beta L^z + L^\beta M^z) + \frac{1}{4} \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} [g_{2,u,AA} + g_{2,u,BB} + 2 | g_{2,u,AB} |] L^\beta \Delta L^\gamma + \\
 & + \frac{1}{4} \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} [g_{2,u,AA} + g_{2,u,BB} - 2 | g_{2,u,AB} |] M^\beta \Delta M^\gamma + \frac{1}{4} \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} [g_{2,u,AA} - g_{2,u,BB}] (M^\beta \Delta L^\gamma + L^\beta \Delta M^\gamma) + \\
 & + \frac{1}{4} \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} \left[L^\beta [\hat{g}_{AA} + \hat{g}_{BB} + 2 | \hat{g}_{AB} |] L^\nu + M^\beta [\hat{g}_{AA} + \hat{g}_{BB} - 2 | \hat{g}_{AB} |] M^\nu + M^\beta [\hat{g}_{AA} - \hat{g}_{BB}] L^\nu + L^\beta [\hat{g}_{AA} - \hat{g}_{BB}] M^\nu \right]. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие сумму констант взаимодействия, соответствуют слагаемым, рассмотренным выше в случае совпадения модулей констант взаимодействия (см., к примеру, $[\kappa_{AA} + \kappa_{BB} + 2 | \kappa_{AB} |] / 4 \equiv \kappa$). Слагаемые, содержащие разность констант взаимодействия $[\kappa_{AA} + \kappa_{BB} - 2 | \kappa_{AB} |]$, соответствуют дополнительным слагаемым, обусловленным различием модулей обмен-

ных интегралов для взаимодействия частиц разных сортов AA , BB , AB .

1.6. Анизотропное взаимодействие Дзялошинского–Мория в уравнении для L и M

Так как анизотропию взаимодействия Дзялошинского–Мория можно рассматривать как поправку к его изотропной части, то ограничимся случаем одинаковых модулей обменных интегралов:

$$\partial_t L^\alpha = \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} M^\beta \left[-\varepsilon^{\gamma x\nu} [\sigma \partial_x + \sigma' \varepsilon^{x\sigma\lambda} \delta^\lambda \partial^\sigma] - \varepsilon^{\gamma y\nu} [\sigma \partial_y + \sigma' \varepsilon^{y\sigma\lambda} \delta^\lambda \partial^\sigma] + 2\varepsilon^{\gamma z\nu} [\sigma \partial_z + \sigma' \varepsilon^{z\sigma\lambda} \delta^\lambda \partial^\sigma] \right] L^\nu, \quad (33)$$

и

$$\partial_t M^\alpha = \frac{1}{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} L^\beta \left[-\varepsilon^{\gamma x\nu} [\sigma \partial_x + \sigma' \varepsilon^{x\sigma\lambda} \delta^\lambda \partial^\sigma] - \varepsilon^{\gamma y\nu} [\sigma \partial_y + \sigma' \varepsilon^{y\sigma\lambda} \delta^\lambda \partial^\sigma] + 2\varepsilon^{\gamma z\nu} [\sigma \partial_z + \sigma' \varepsilon^{z\sigma\lambda} \delta^\lambda \partial^\sigma] \right] L^\nu, \quad (34)$$

где $\sigma_{AA} = \sigma_{BB} = -\sigma_{AB} \equiv \sigma$

и $\sigma'_{AA} = \sigma'_{BB} = -\sigma'_{AB} \equiv \sigma'$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен систематический вывод уравнения Ландау–Лифшица для антиферромагнетиков. Вывод выполнен методом квантовой гидродинамики, представляющей динамику квантовых частиц, описываемую многочастичным уравнением Шредингера/Паули в терминах эволюции материальных полей.

В данном случае рассмотрены материальные поля плотности спина частиц каждого сорта и их линейные комбинации. За основу был взят несимметричный гамильтониан Гейзенберга, который разбивается на симметричную часть (представляющую x, y, z модель) и антисимметричную часть, описывающую взаимодействие Дзялошинского–Мория. Симметричная часть приводит, на макроскопическом уровне, ко вкладу обменного взаимодействия и энергии анизотропии (она тоже имеет приро-

ду обменного взаимодействия, разного для разных направлений, в силу анизотропии расположения атомов/ионов в кристаллической решётке). Взаимодействие Дзялошинского–Мория трансформировано на макроскопический масштаб в случае изотропной и анизотропной функций, описывающих пространственную зависимость константы Дзялошинского. Уделено внимание различию масс двух сортов атомов/ионов, формирующих магнитный порядок магнитоупорядоченной системы (антиферромагнетика или ферримагнетика). Рассмотрено влияние различия модулей обменных интегралов для взаимодействия разных сортов ча-

стиц между собой и с частицами другого сорта, в уравнениях Ландау–Лифшица, являющееся моделью ферримагнетика.

ДОСТУПНОСТЬ ДАННЫХ

Обмен данными не применим к этой статье, поскольку в этом исследовании, которое является чисто теоретическим, не было создано или проанализировано никаких новых данных.

Работа поддержана Российским научным фондом в рамках гранта No. 25-22-00064.

- [1] Kosevich A.M., Ivanoy B.A., Kovalev A.S. // *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
- [2] Zvezdin A.K., Pyatakov A.P. // *EPL* **99**, 57003 (2012).
- [3] Kuz'menkov L.S., Maksimov S.G. // *Theor. Math. Phys.* **118**, 227 (1999).
- [4] Kuz'menkov L.S., Maksimov S.G., Fedoseev V.V. // *Theoretical and Mathematical Physics.* **126**, 110 (2001).
- [5] Андреев П.А., Труханова М.И. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* **78(4)**, 2340103 (2023).
- [6] Andreev P.A., Trukhanova M.I. // *Phys. Scr.* **99**, 1059b2 (2024).
- [7] Andreev P.A., Trukhanova M.I. // *JETP*, **166**, 665 (2024) [in russian].
- [8] Mostovoy M. // *Phys. Rev. Lett.* **96**, 067601 (2006).
- [9] Risinggard V., Kulagina I., Linder J. // *Sci. Rep.* **6**, 31800 (2016).
- [10] Sparavigna A., Strigazzi A., Zvezdin A. // *Phys. Rev. B* **50**, 2953 (1994).
- [11] Zvezdin A.K., Mukhin A.A. // *JETP Lett.* **89**, 328 (2009).
- [12] Tokura Y., Seki S., Nagaosa N. // *Rep. Prog. Phys.* **77**, 076501 (2014).
- [13] Dong S., Liu J.-M., Cheong S.-W., Ren Z. *Advances in Physics* **64**, 519 (2015).
- [14] Fishman R.S., Rößm T., de Sousa R. // *Phys. Rev. B* **99**, 064414 (2019).
- [15] Chizhikov V.A., Dmitrienko V.E. // *Phys. Rev. B* **88**, 214402 (2013).
- [16] Khomskii D.I. // *JETP* **132**, 482 (2021).
- [17] Huang S., Zhou C., Chen G. et al. // *Phys. Rev. B* **96**, 144412 (2017).
- [18] Udalov O.G., Beloborodov I.S., Sapozhnikov M.V. *Phys. Rev. B* **103**, 174416 (2021).
- [19] Sapozhnikov M.V., Gorev R.V., Skorokhodov E.V. et al. // *Phys. Rev. B* **105**, 024405 (2022).
- [20] Мухин А.А., Кузьменко А.М., Иванов В.Ю. и др. // *УФН* **185**, 1089 (2015). (Mukhin A.A., Kuzmenko A.M., Ivanov V.Yu. et al. // *Phys. Usp.* **58**, 993 (2015)).
- [21] Gareeva Z.V., Popkov A.F., Soloviov S.V., Zvezdin A.K. // *Phys. Rev. B* **87**, 214413 (2013).
- [22] Ado I.A., Qaiumzadeh A., Brataas A., Titov M. // *Phys. Rev. B* **101**, 161403(R) (2020).
- [23] Ansalone P., Olivetti E.S., Magni A. et al. // *AIP Advances* **12**, 035135 (2022).
- [24] Andreev P.A., Trukhanova M.I. // arXiv:2506.15839, (2025).

Generalisation and Microscopic Justification of the Material-Field Form of the Landau–Lifshitz Equation for Antiferromagnets

P. A. Andreev

*Department of General Physics and Molecular Electronics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: andreevpa@physics.msu.ru*

The derivation of the Landau–Lifshitz equations for antiferromagnets with two types of magnetic ions of different mass is presented. The contribution of the difference in the interaction potentials of different subsystems is discussed (the difference in masses, potentials and magnetic moments corresponds to ferrimagnets). The derivation of the exchange interaction and the contribution of the anisotropy energy is based on the use of the «x, y, z» model. The derivation of the contribution of the Dzyaloshinskii–Moriya interaction is considered. Two modes of the occurrence of the Dzyaloshinskii–Moriya interaction are studied; one is due to the violation of the inversion symmetry in the lattice, and the second is associated with the existence (and displacement) of the ligand ion, which is the oxygen ion. In addition, the possibility of anisotropy of the Dzyaloshinskii–Moriya interaction is taken into account.

PACS: 02.65.Ca, 75.10.-b.

Keywords: magnetically ordered media, the Landau-Lifshitz equation, anisotropy of the Dzyaloshinsky–Moriya interaction, quantum hydrodynamics, the relationship between micro and macro models.

Received 04 September 2025.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. 6. Pp. 959–969.

Сведения об авторах

Андреев Павел Александрович — доктор физ.-мат. наук, доцент физического факультета МГУ;
e-mail: andreevpa@physics.msu.ru.