ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Линейный потенциал нулевого радиуса в трехмерном пространстве и эффекты поляризации вакуума

П. А. Спирин[1, *]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Поступила в редакцию 17.11.2025; после доработки 29.11.2025; подписана в печать 30.11.2025)

Предлагается непертурбативное вычисление перенормированной функции Грина безмассового действительного скалярного поля ϕ в трехмерном пространстве с двумерным потенциалом нулевого радиуса, локализованным на бесконечной прямой. Подобный потенциал соответствует экзотическому пределу $\xi \to \infty$, $\beta' \sim 1/\xi$ поляризации вакуума в пространстве космической струны. Подход предполагает перенормировку константы связи λ. Перенормированные евклидова и адамарова функции Грина представлены в эквивалентных формах в виде однократных интегралов от специальных функций. С использованием перенормированной функции Адамара вычислены перенормированные вакуумные средние квадрата поля и оператора тензора энергии-импульса, исследованы асимптотические случаи.

PACS: 11.10.Gh, 02.90.+p, 12.90.+b УДК: 53.02
Ключевые слова: линейный дефект, дельта-образный потенциал, поляризация вакуума, перенормировка константы связи.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.81.2610102

ВВЕДЕНИЕ

Пространства с коническими особенностями привлекли к себе внимание достаточно давно и прежде всего в связи с гипотезой космических струн [1–5]. Действительно, в простейшем случае прямолинейной струны пространство-время представляет собой произведение конуса на двумерное пространство Минковского. Позже было установлено, что геометрически некоторые дефекты кристаллов описываются точно так же [6]. Далее аналогичные решения рассматривались и в случае пространств с отличным от четырех числом измерений [7]. Важно, что в упомянутых выше приложениях характеризующий конус дефицит угла крайне мал (порядка 10^{-5}) и коническая поверхность почти неотличима от плоскости — но не на вершине конуса, где тензор Римана имеет дельта-особенность. В результате в рассматриваемом случае скалярного поля в уравнении Клейна–Гордона появляется выражение вида $\lambda\delta^n(\boldsymbol{x})$ [8, 9], где $\delta^n(\boldsymbol{x})$ обозначает n-мерную дельта-функцию, определенную в d-мерном евклидовом пространстве ($0 \leqslant n \leqslant d$). Таким образом, в операторе поля появляется эвристическое выражение

$$\Delta_d + \lambda\delta^n(\boldsymbol{x})\,, \tag{1}$$

и следует прояснить, каким образом следует понимать эту формально записанную сумму.

Попытки преодоления этой проблемы предпринимались неоднократно [10–12], но в одних случаях они не являются в должной мере последовательными, а в других, как это было отмечено в работах [13, 14], сопряжены с необходимостью перенормировки константы взаимодействия λ. Следовательно, ответ становится зависящим от перенормированной константы, значение которой следует определять независимо. В частности, при пертурбативных вычислениях [7, 15, 16] необходимость перенормировки возникает в каждом порядке теории возмущений.

Аналогичная проблема возникает и в рамках нерелятивистской квантовой механики. Однако там был предложен и широко обсуждался альтернативный подход, основанный на замене неопределенного с математической точки зрения выражения (1) на самосопряженное расширение оператора Лапласа [17–20] в пространстве с выколотой точкой. В ряде работ [16, 21–25] мы предложили распространить этот подход на квантовую теорию поля.

Однако самосопряженное расширение оператора Лапласа в случае искривленного пространства пока не известно. Поэтому мы рассмотрели упрощенную модель. Исходным для предложенной модели является то, что основным в формальном выражении (1) в случае малого углового дефицита является, безусловно, наличие дельта-образного члена. Поэтому, пользуясь малостью дефицита угла, мы сочли возможность им пренебречь, а учесть именно наличие в операторе поля сингулярного слагаемого соответствующей размерности. Таким образом, в рамках предложенной модели мы эффективно приходим к задаче о линейном источнике потенциала нулевого радиуса, в поперечном сечении к которому возникает эффективное одноцентровое взаимодействие на плоскости.

* E-mail: pspirin@physics.uoc.gr

Соответственно мы формально приходим к задаче в пространстве с равным двум числом пространственных измерений. Так, в неоднократно рассматривавшемся в литературе случае космической струны сечение $t, z = \mathrm{const}$ (где z — координата вдоль струны) пространства-времени представляет собой конус и в уравнении поля появляется член с двумерной дельта-функцией $\delta^2(\mathbf{x})$. Случай $(n = 2, d = 2)$ был рассмотрен нами в работе [25] в технике самосопряженного расширения. Сейчас мы ограничимся случаем $(n = 2, d = 3)$, где предлагаем альтернативный, прямой операторный подход, в рамках которого непертурбативно рассмотрим задачу поляризации вакуума безмассового действительного скалярного поля.

Используется система единиц $\hbar = c = 1$ и метрика пространства-времени с сигнатурой $(+---)$.

1. ФУНКЦИИ ГРИНА

Рассмотрим сингулярный эвристически записанный потенциал $U(x) = \lambda\delta^2(\boldsymbol{x})$, зависящий только от двух из трех декартовых координат пространственного сектора, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$. Носитель обобщенной функции $\delta^2(\boldsymbol{x})$ есть бесконечно тонкая прямая, совпадающая с третьей пространственной осью, которую обозначим как z. Тогда для уравнения Клейна–Гордона безмассового скалярного поля

$$\begin{gathered}\left[\Box + \lambda\delta^2(\boldsymbol{x})\right]\phi(t, \boldsymbol{x}, z) = 0\,,\\ \Box := \partial_t^2 - \Delta_2 - \partial_z^2,\end{gathered} \tag{2}$$

где Δ_2 — двумерный оператор Лапласа в плоскости (x_1, x_2), в евклидовой функции Грина $G_\lambda(\tau, \tau', z, z'; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, $(\tau = it)$, проведем частичное преобразование Фурье по переменным $\boldsymbol{z} = (\tau, z)$: используя однородность пространства по этим переменным, имеем:

$$G_\lambda(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\, e^{-i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}')} d^2q\,. \tag{3}$$

Тогда $\tilde{G}(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - q^2 - \lambda\delta^2(\boldsymbol{x})\right)\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -\delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\,,$$

где $q = |\boldsymbol{q}|$. Используя свойство дельта-функции, имеем:

$$\left(\partial_1^2 + \partial_2^2 - q^2\right)\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') - \lambda\delta^2(\boldsymbol{x})\,\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}') = -\delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\,. \tag{4}$$

Проведем дальнейшее преобразование Фурье по переменным $\boldsymbol{x}$:

$$\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\, \bar{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{k}; \boldsymbol{x}')\,. \tag{5}$$

Тогда, подставляя (5) в (4), получим

$$\bar{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{k}; \boldsymbol{x}') = \frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}'}}{q^2 + k^2} - \frac{\lambda}{q^2 + k^2}\,\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}')\,, \tag{6}$$

где

$$\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}') = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\bar{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{k}; \boldsymbol{x}')\,.$$

Отсюда для $\lambda = 0$ (отсутствие взаимодействия) имеем:

$$\bar{G}_0(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{k}; \boldsymbol{x}') = \frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}'}}{q^2 + k^2}\,,$$

$$\tilde{G}_0(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}}{q^2 + k^2}\,,$$

откуда видно, что $\bar{G}_0$ и $\tilde{G}_0$ зависят от $\boldsymbol{q}$ только как от модуля (q). Интегрирование уравнения (6) по k приводит к соотношению

$$\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}')\Big[1 + \lambda\tilde{G}_0(q, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})\Big] = \tilde{G}_0(q, -\boldsymbol{x}', \boldsymbol{0})\,.$$

Выражая $\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}')$ и подставляя в уравнение (6), получаем выражение $\bar{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{k}; \boldsymbol{x}')$ через $\tilde{G}_0(q; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$:

$$\bar{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{k}; \boldsymbol{x}') = \frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}'}}{q^2 + k^2} - \frac{1}{q^2 + k^2}\,\frac{\tilde{G}_0(q; -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})}{\lambda^{-1} + \tilde{G}_0(q; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})}\,.$$

Интегрируя обратно с помощью (5), получаем выражение $\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ через $\tilde{G}_0(q; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$:

$$\tilde{G}_\lambda(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \tilde{G}_0(q; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', \boldsymbol{0}) - \frac{\tilde{G}_0(q; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})\,\tilde{G}_0(q; -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})}{\lambda^{-1} + \tilde{G}_0(q; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})}\,.$$

Наконец, подставляя в обратное преобразование Фурье (3), получим полную функцию Грина:

$$G_\lambda(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = G_0(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}')}\,\frac{\tilde{G}_0(q; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})\,\tilde{G}_0(q; -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})}{\lambda^{-1} + \tilde{G}_0(q; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})}\,,$$

где $G_0(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ — функция Грина пустого пространства Минковского в отсутствие взаимодействия. $\tilde{G}_0(q; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ вычисляется с помощью двух табличных интегралов [26]:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iz\cos\varphi} d\varphi = 2\pi J_0(z)\,, \qquad \int_0^{\infty} \frac{J_0(au)}{u^2 + c^2}\,u\,du = K_0(ac)\,, \tag{7}$$

где $J_0(\cdot)$ — бесселева функция первого рода, $K_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда). Это дает

$$\tilde{G}_0(q; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \frac{1}{2\pi}K_0(qr)\,, \qquad r := |\boldsymbol{x}|\,. \tag{8}$$

При вычислении $\tilde{G}_0(q; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ предел $r \to 0^+$ логарифмически стремится к бесконечности; воспользуемся стандартным в квантовой теории поля представлением:

$$\tilde{G}_0(q;\mathbf{0},\mathbf{0}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{q^2+k^2} \simeq \frac{1}{4\pi}\,\ln\frac{\Lambda^2}{q^2}\,, \qquad (9)$$

где Λ — ультрафиолетовый параметр обрезания. Полученный результат приводит к заключению, что константа связи λ должна быть перенормирована согласно

$$\frac{1}{\lambda_{\text{ren}}} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\,, \qquad (10)$$

где μ — константа с физической размерностью обратной длины (массы), необходимая для обезразмеривания аргумента логарифма.

Сопоставляя (9) с выражением (8), формальный предел функции Макдональда соответствует

$$K_0(q0^+) \simeq \ln\frac{\Lambda}{q}\,, \qquad \Lambda \to +\infty\,. \qquad (11)$$

Подставляя формулы (8) и (9), получим:

$$G_\lambda(x,x') = G_0(x-x') - \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^2q\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}')}\times$$
$$\times\, K_0(qr)K_0(qr')\left[\frac{1}{\lambda_{\text{ren}}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{q}{\mu}\right]^{-1}.$$

Обозначим $\varkappa = \mu\exp(2\pi/\lambda_{\text{ren}})$, в плоскости $\boldsymbol{q}$ введем полярную систему координат и проинтегрируем по полярному углу с помощью (7):

$$G_\lambda(x,x') = G_0(x-x') +$$
$$+\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty J_0(q|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|)\,\frac{K_0(qr)\,K_0(qr')}{\ln(q/\varkappa)}\,qdq\,.$$

Функция $G_0(x-x')$ является функцией Грина в отсутствие взаимодействия, поэтому для описания эффектов, связанных именно с наличием дельта-потенциала, ее можно считать «нулевым уровнем» и опустить; тогда остаток представляет собой перенормированную функцию Грина:

$$G^{\text{ren}}_\lambda(x,x') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty J_0(q|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|)\times$$
$$\times\,\frac{K_0(qr)\,K_0(qr')}{\ln(q/\varkappa)}\,qdq\,. \qquad (12)$$

Формально записанный интеграл проходит через простой полюс в точке $q=\varkappa>0$, т.е. расходится в римановом смысле, поэтому следует прояснить, в каком смысле можно понимать это выражение. Используя свойства

$$H_0^{(1)}(ix) = \frac{2i}{\pi}\,K_0(x)\,, \qquad J_0(ix) = I_0(x)\,,$$
$$H_0^{(1)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{i(z-\pi/4)},$$

где $x>0$, $\mathrm{Im}z \geqslant 0$, $H_0^{(1)}(\cdot)$ — бесселева функция третьего рода (функция Ханкеля первого рода), а $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда), выражение (12) можно представить в виде сходящегося риманова интеграла от произведений функций Томсона (Кельвина) нулевого порядка kei, ker, bei и ber: при $r+r' > |\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|$

$$G^{\text{ren}}_\lambda(x,x') = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{A_+B_- + A_-B_+}{\pi^2 + 16\ln^2(u/\varkappa)}\,udu\,, \qquad (13)$$

где введены

$$\begin{aligned}
A_+ &= \pi\,\mathrm{ber}(|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|u) + 4\ln(u/\varkappa)\,\mathrm{bei}(|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|u),\\
A_- &= \pi\,\mathrm{bei}(|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|u) - 4\ln(u/\varkappa)\,\mathrm{ber}(|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|u),\\
B_+ &= \mathrm{kei}(ur)\,\mathrm{ker}(ur') + \mathrm{kei}(ur')\,\mathrm{ker}(ur),\\
B_- &= \mathrm{ker}(ur)\,\mathrm{ker}(ur') - \mathrm{kei}(ur)\,\mathrm{kei}(ur')\,.
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой с использованием модифицированного уравнения Бесселя нулевого порядка

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\begin{Bmatrix}\mathrm{bei}(ur)\\ \mathrm{ber}(ur)\end{Bmatrix} = u^2\begin{Bmatrix}\mathrm{ber}(ur)\\ -\mathrm{bei}(ur)\end{Bmatrix}$$

(и аналогично для kei и ker), можно независимо убедиться, что $G^{\text{ren}}_\lambda(x,x')$ в форме (13) действительно удовлетворяет уравнению

$$\left[\Delta_4 - \lambda\delta^2(\boldsymbol{x})\right]G^{\text{ren}}_\lambda(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}';\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') =$$
$$= -\lambda\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')G_0(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}';\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,,$$

т.е. является перенормированной евклидовой функцией Грина в координатном представлении. Теперь функция Грина корректно определена выражением (13). Выясним, какому обходу полюса в формальном выражении (12) это соответствует: преобразуя интеграл обратно к функциям Инфельда и Ханкеля и замыкая контур на бесконечно удаленной одной восьмой окружности $\arg y \in [\pi/4, \pi/2]$, мы получим

$$G^{\text{ren}}_\lambda(x,x') = \frac{1}{16}\,\mathrm{Re}\int\limits_L I_0(y|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|)\times$$
$$\times\,\frac{H_0^{(1)}(yr)\,H_0^{(1)}(yr')}{\ln(y/\varkappa) - i\pi/2}\,ydy\,, \qquad (14)$$

где путь интегрирования L состоит из прямых отрезков[1] $[0, i(\varkappa-\epsilon)]$, $[i(\varkappa+\epsilon), +i\infty]$ мнимой оси и полуокружности $y = i\varkappa + \epsilon\mathrm{e}^{i\varphi}$, где $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ — так, чтобы полюс не вошел внутрь замкнутого контура интегрирования. Нетрудно видеть, что интеграл по полуокружности обхода полюса в пределе $\epsilon \to 0^+$ равен

$$-\frac{i}{4\pi}\,\varkappa^2 J_0(\varkappa|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|)K_0(\varkappa r)K_0(\varkappa r')\,,$$

[1] Точка ветвления бесселевых функций $y=0$ обходится соответственно и не дает вклада в исследуемый контурный интеграл.

т.е. не содержит действительной части, поэтому искомое выражение задается интегралами по двум отрезкам: вводя $y = iq$, получим

$$G_\lambda^{\rm ren}(x,x') = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^2}\times$$
$$\times \int\limits_{|q-\varkappa|>\epsilon} \theta(q) J_0(q|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|)\,\frac{K_0(qr)\,K_0(qr')}{\ln(q/\varkappa)}\,qdq\,.$$

Это не что иное, как интеграл (12), понимаемый в смысле главного значения по Коши, который сходится для данного подынтегрального выражения. Тогда итоговое выражение для перенормированной евклидовой функции Грина имеет вид

$$G_\lambda^{\rm ren}(x,x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \fint_0^\infty J_0(q|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|)\times$$
$$\times \frac{K_0(qr)\,K_0(qr')}{\ln(q/\varkappa)}\,qdq\,. \quad (15)$$

Переходя от евклидовой функции Грина к соответствующей перенормированной функции Адамара $D_\lambda^{\rm ren}$ исходного уравнения (2), получим

$$D_\lambda^{\rm ren}(x,x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \fint_0^\infty dq\, q\,\frac{K_0(qr)\,K_0(qr')}{\ln(q/\varkappa)}\times$$
$$\times \begin{cases} I_0(q\tau_+), & |\Delta t| > |\Delta z|;\\ J_0(q\tau_-), & |\Delta z| > |\Delta t|, \end{cases} \quad (16)$$

где $\tau_\pm := \sqrt{\pm(\Delta t^2-\Delta z^2)}$, $\Delta t := t-t'$, $\Delta z := z-z'$. Оба выражения верны в секторе $\tau_\pm^2 < (r+r')^2$. Нас будет интересовать случай совпадающих переменных ($\tau_\pm = 0$, $r = r' > 0$); он как раз удовлетворяет этому условию. В плоскости Ox_1x_2 функции Грина $G_\lambda^{\rm ren}$ и $D_\lambda^{\rm ren}$ не зависят от угла между $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$.

Поскольку бесселевы функции удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_2 J_0(\varkappa r) = -\varkappa^2 J_0(\varkappa r)\,, \qquad \Delta_2 I_0(\varkappa r) = \varkappa^2 I_0(\varkappa r)\,,$$
$$\Delta_2 K_0(\varkappa r) = \varkappa^2 K_0(\varkappa r) - 2\pi\delta^2(\boldsymbol{x})\,,$$

то функция $D_\lambda^{\rm ren}(x,x')$ удовлетворяет уравнению

$$\Box D_\lambda^{\rm ren} = \frac{1}{2\pi}\,\delta^2(\boldsymbol{x}) \fint_0^\infty dq\, q\,\frac{I_0(q\tau_+)\,K_0(qr')}{\ln(q/\varkappa)} \quad (17)$$

в секторе $r' > \tau_+ \geqslant 0$, тогда с учетом (11) действие оператора поля с дельтаобразным потенциалом дает

$$\left[\Box + \lambda\delta^2(\boldsymbol{x})\right] D_\lambda^{\rm ren} = \frac{\lambda}{(2\pi)^2}\,\frac{\delta^2(\boldsymbol{x})}{\Delta t^2 - \Delta z^2 - r'^2}\,, \quad (18)$$

и то же при $|\Delta z| > |\Delta t|$, где использованы табличные интегралы [26]

$$\int_0^\infty J_0(au) K_0(cu)\, udu = \frac{1}{a^2+c^2}\,,$$
$$\int_0^\infty I_0(au) K_0(cu)\, udu = \frac{1}{c^2-a^2}\,.$$

Адамарова функция в представлении функций Томсона равна

$$D_\lambda^{\rm ren}(x,x') = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\tilde{A}_- B_- - \tilde{A}_+ B_+}{\pi^2 + 16\ln^2(u/\varkappa)}\, udu\,, \quad (19)$$

где введены

$$\tilde{A}_- = \pi {\rm ber}(\tau_+ u) - 4\ln(u/\varkappa)\,{\rm bei}(\tau_+ u)\,,$$
$$\tilde{A}_+ = \pi {\rm bei}(\tau_+ u) + 4\ln(u/\varkappa)\,{\rm ber}(\tau_+ u)\,.$$

Итак, получены выражения для полной и перенормированной функций Грина в модели с линейным δ^2-образным источником. Помимо координат, результат зависит от единственного параметра $\varkappa$ с размерностью обратной длины, который объединяет информацию о перенормированной силовой константе $\lambda_{\rm ren}$ и параметре μ, введенном естественным образом для обезразмеривания аргумента логарифма. По сути, $\varkappa$ представляет собой характерный масштаб масс *с учетом точечного взаимодействия*, который отсутствовал в изначальной теории, но будет входить в итоговые конечные выражения. Соответственно его значение должно быть получено из экспериментальных данных, например из данных по длине рассеяния $l_{\rm sc}$ на таком потенциале в нерелятивистском пределе [17]:

$$\varkappa = 1/l_{\rm sc}\,.$$

2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

Значение функции Грина в совпадающих точках дает перенормированное вакуумное среднее квадрата скалярного поля:[2]

$$\langle\phi^2\rangle_{\rm ren} = \{D_\lambda^{\rm ren}\}\,. \quad (20)$$

Подставляя (15), получим

$$\left\langle\phi^2(r)\right\rangle_{\rm ren} = \frac{1}{(2\pi)^2} \fint_0^\infty \frac{qK_0^2(qr)}{\ln(q/\varkappa)}\,dq\,. \quad (21)$$

Соответствующее выражение $\langle\phi^2(r)\rangle_{\rm ren}$ через функции Томсона равно

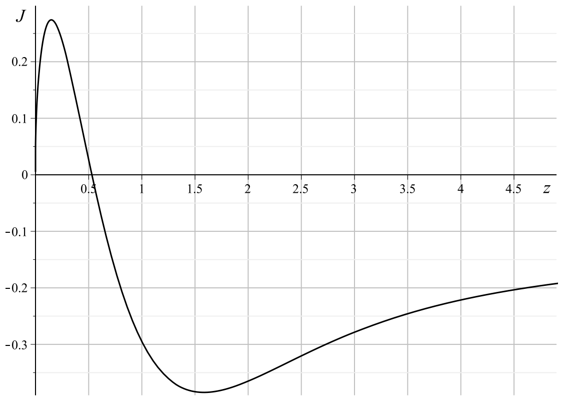

Рис. 1. График функции $\mathcal{J}(z)$

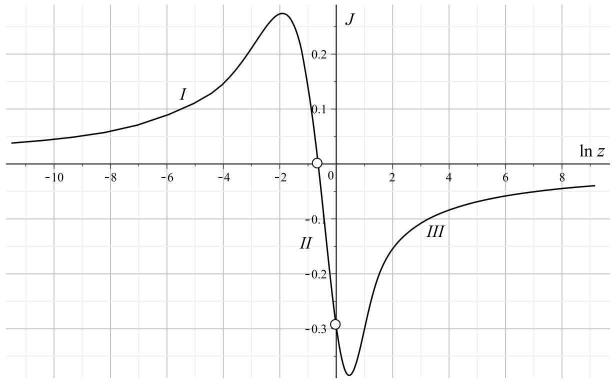

Рис. 2. График функции $\mathcal{J}(z)$ при логарифмическом масштабировании оси абсцисс

$$\left\langle \phi^2(r) \right\rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{-(8/\pi)\ln(u/\varkappa)\,\mathrm{kei}(ur)\,\mathrm{ker}(ur) + \mathrm{ker}^2(ur) - \mathrm{kei}^2(ur)}{\pi^2 + 16\ln^2(u/\varkappa)}\, udu\,,$$

в силу $\mathrm{bei}(0) = 0$, $\mathrm{ber}(0) = 1$. Делая замену переменной $ur \to u$, получим ответ в виде однопараметрического интеграла

$$\left\langle \phi^2(r) \right\rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{\pi^3 r^2}\,\mathcal{J}(\varkappa r)\,, \qquad \mathcal{J}(z) := \int\limits_0^\infty \frac{-(8/\pi)\ln(u/z)\,\mathrm{kei}(u)\,\mathrm{ker}(u) + \mathrm{ker}^2(u) - \mathrm{kei}^2(u)}{1 + 16\pi^{-2}\ln^2(u/z)}\, udu\,. \tag{22}$$

График функции $\mathcal{J}(z)$ представлен на рис. 1.

Отметим, что в интеграле (21) также допустима замена переменных вида рескейлинга: соответственно, функция $\mathcal{J}(z)$ представима в виде

$$\mathcal{J}(z) = \frac{z^2\pi}{4} \fint\limits_0^\infty \frac{qK_0^2(qz)}{\ln q}\, dq\,. \tag{23}$$

Более наглядное представление дает логарифмическое масштабирование оси абсцисс; график представлен на рис. 2.

В пределе слабого взаимодействия при фиксированном r можно разложить $\mathcal{J}$ по малому λ_{ren}: в подынтегральном выражении на основной области формирования интеграла справедливо $2\pi\lambda_{\text{ren}}^{-1} \gg q/\mu$. Тогда

$$\left\langle \phi^2(r) \right\rangle_{\text{ren}} = -\frac{\lambda_{\text{ren}}}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty K_0^2(qr)\, qdq + \mathcal{O}(\lambda_{\text{ren}}^2)\,.$$

С помощью табличного интеграла [27]

$$\int\limits_0^\infty K_\mu(z)K_\nu(z)\, z^{\alpha-1}dz = $$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\mu-\nu}{2}\right)}{2^{3-\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)} \tag{24}$$

($\alpha > \mu + \nu > 0$) приходим к ответу:

$$\left\langle \phi^2(r) \right\rangle_{\text{ren}} = -\frac{\lambda_{\text{ren}}}{16\pi^3 r^2} + \mathcal{O}(\lambda_{\text{ren}}^2)\,. \tag{25}$$

При фиксированном значении λ_{ren} асимптотические случаи получаются при больших по модулю значениях $(\ln \varkappa r)$. Пренебрегая в (21) $\ln u$ по сравнению с $\ln \varkappa r$ на основной области формирования интеграла и вычисляя интеграл по формуле (24), получаем

$$\langle \phi^2(r) \rangle_{\text{ren}} = \pm \frac{1}{8\pi^2 r^2\, \ln \varkappa r}\,, \tag{26}$$

где знак плюс соответствует ультрамалым $(\ln \varkappa r \ll -1)$, а знак минус — ультрабольшим $(\ln \varkappa r \gg 1)$ расстояниям до носителя сингулярного потенциала.

Асимптотическое наличие логарифма в знаменателе $\mathcal{J}(z)$ проиллюстрировано на рис. 3: тангенс угла наклона равен -1 при больших $\ln|z|$ (кривые I и III), наклонная асимптота соответствует теоретической формуле (26).

[2] Здесь и далее значение D_λ^{ren} и ее производных, вычисленное в совпадающих точках $x = x'$, обозначается фигурной скобкой.

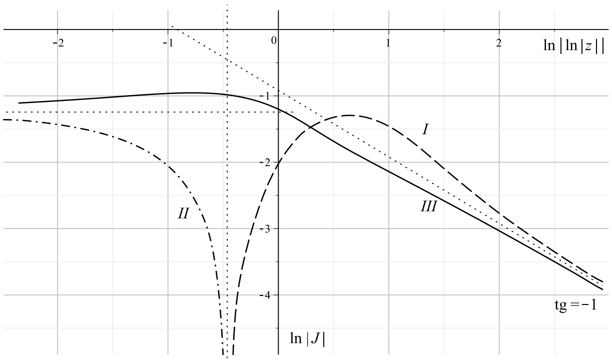

Рис. 3. График зависимости $\ln|\mathcal{J}(z)|$ от $\ln\big|\ln|z|\big|$. Кривые $I - III$ соответствуют одноименным участкам рис. 2

3. ПЕРЕНОРМИРОВАННЫЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Тензор энергии-импульса действительнозначного безмассового скалярного поля в четырехмерном пространстве-времени задается выражением

$$T_\mu^\nu = (1-2\xi)\,\partial^\nu\phi\,\partial_\mu\phi + \Big(2\xi - \frac{1}{2}\Big)\delta_\mu^\nu\partial^\lambda\phi\,\partial_\lambda\phi - \\ - 2\xi\phi\nabla^\nu\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\,\xi\delta_\mu^\nu\phi\Box\phi\,, \qquad (27)$$

где ∇_μ — ковариантная производная в выбранных координатах, ξ — константа связи скалярного поля с кривизной многообразия или пространства-времени.

Поскольку ϕ удовлетворяет уравнению (2), слагаемое $\Box\phi$, сингулярное на носителе потенциала и зануляющееся вне его, при $r > 0$ можно опустить. Тогда вакуумное среднее перенормированного оператора тензора энергии-импульса определяется производными от $D_\lambda^{\rm ren}(x,x')$, вычисленными в совпадающих точках $t = t'$, $z = z'$, $r = r'$:

$$\langle T_\mu^\nu\rangle_{\rm ren} = \lim_{x'\to x}\Big[(1-2\xi)\,\partial^\nu\partial'_\mu + \Big(2\xi-\frac{1}{2}\Big)\delta_\mu^\nu\partial^\lambda\partial'_\lambda - \\ -\xi\left(\nabla^\nu\partial_\mu + \nabla'^\nu\partial'_\mu\right)\Big]\,D_\lambda^{\rm ren}(x,x')\,. \qquad (28)$$

Отметим, что интеграл $\mathcal{J}(z)$, заданный в форме (23), можно дифференцировать по z под знаком главного значения интеграла.

Будем использовать цилиндрические координаты t, z, r, φ. Вычислим первые производные в пределе совпадающих точек:

$$\begin{aligned} \{\partial_t D_\lambda^{\rm ren}\} &= -\{\partial'_t D_\lambda^{\rm ren}\} = 0\,,\\ \{\partial_z D_\lambda^{\rm ren}\} &= -\{\partial'_z D_\lambda^{\rm ren}\} = 0\,,\\ \{\partial_r D_\lambda^{\rm ren}\} &= \frac{1}{2\pi^3 r^3}\Big(\mathcal{J}_1(\varkappa r) - 2\mathcal{J}(\varkappa r)\Big), \end{aligned} \qquad (29)$$

где введено $\mathcal{J}_1(z) := z\mathcal{J}'(z)$.

Соответственно вторые производные в пределе совпадающих точек определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \{\partial_t^2 D_\lambda^{\rm ren}\} &= \frac{1}{2\pi^3 r^4}\,\mathcal{K},\\ \left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} D_\lambda^{\rm ren}\right\} &= \frac{1}{2\pi^3 r^4}\,\Big[2\mathcal{K} - \mathcal{J}_1 + 2\mathcal{J}\Big],\\ \left\{\frac{\partial^2}{\partial r\partial r'} D_\lambda^{\rm ren}\right\} &= \frac{1}{2\pi^3 r^4}\,\Big[\mathcal{J}_2 - 3\mathcal{J}_1 + 4\mathcal{J} - 2\mathcal{K}\Big], \end{aligned} \qquad (30)$$

где мы по-прежнему опускаем вклады, локализованные на самом источнике, и введены

$$\mathcal{J}_2(z) = z^2\mathcal{J}''(z)\,, \qquad \mathcal{K}(z) = \frac{\pi}{4}\,⨍_0^\infty dq\,q^3\,\frac{K_0^2(q)}{\ln(q/z)}\,,$$

а все величины $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_{1,2}$, $\mathcal{K}$ вычисляются при значении аргумента $z = \varkappa r$. В силу симметрий $D_\lambda^{\rm ren}(x,x')$

$$\begin{aligned} \{\partial_z^2 D_\lambda^{\rm ren}\} &= -\{\partial_t^2 D_\lambda^{\rm ren}\}\,,\\ \left\{\frac{\partial^2}{\partial r'^2} D_\lambda^{\rm ren}\right\} &= \left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} D_\lambda^{\rm ren}\right\}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения через интегралы одного переменного, найдем:

$$\begin{aligned} \langle T_0^0\rangle &= \frac{1}{4\pi^3 r^4}\,\Big[(1-4\xi)\Big(\mathcal{J}_2 - 3\mathcal{J}_1 + 4\mathcal{J}\Big) + (4\xi-2)\mathcal{K}\Big]\\ &= \langle T_z^z\rangle\\ \langle T_r^r\rangle &= \frac{1}{4\pi^3 r^4}\,\Big[-\mathcal{J}_2 + (3-4\xi)\mathcal{J}_1 + (8\xi-4)\mathcal{J} + 3\mathcal{K}\Big]\\ \langle T_\varphi^\varphi\rangle &= \frac{1}{4\pi^3 r^4}\,\Big[(1-4\xi)(\mathcal{J}_2 - \mathcal{K}) + (16\xi-3)\mathcal{J}_1 + (4-24\xi)\mathcal{J}\Big]. \end{aligned} \qquad (31)$$

Недиагональные компоненты равны нулю.

Тогда след перенормированного вакуумного среднего тензора энергии-импульса равен

$${\rm Sp}\,\langle T\rangle = \frac{1-6\xi}{2\pi^3 r^4}\,\Big[\mathcal{J}_2(\varkappa r) - 3\mathcal{J}_1(\varkappa r) + 4\mathcal{J}(\varkappa r) - \mathcal{K}(\varkappa r)\Big].$$

В соответствии с теорией безмассового скалярного поля [28] след исчезает при конформной связи $\xi = 1/6$ четырехмерного пространства-времени.

Сохранение перенормированного ТЭИ. Проверим, что тензор энергии-импульса (понимаемый в смысле перенормированных вакуумных средних) сохраняется. Поскольку в цилиндрической системе координат метрика и компоненты $\langle T^\nu_\mu \rangle$ зависят только от радиальной координаты, дивергенция $\nabla_\nu \langle T^\nu_\mu \rangle$ для $\mu = t, z, \varphi$ зануляется автоматически, а для $\mu = r$ сохранение эквивалентно выполнению равенства

$$r\frac{\partial}{\partial r}\langle T^r_r \rangle = \langle T^\varphi_\varphi \rangle - \langle T^r_r \rangle.$$

Используя полученные выражения (31) и свойства бесселевых функций, получим искомое тождество:

$$\nabla_\nu \langle T^\nu_\mu \rangle = 0\,.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель, позволяющая описать теоретикополевые эффекты в трехмерном плоском пространстве-времени с сингулярным потенциалом нулевого радиуса, имеющим линейный носитель. Предложенная модель сводит исследование квантовополевых эффектов к аналогичной задаче на фоне двумерной плоскости с одной выколотой точкой (дефектом).

Описание дефекта осуществляется формальным введением в уравнение поля дельтаобразного потенциала $\lambda\delta^2(\mathbf{x})$. Предложено непертурбативно вычислять евклидову функцию Грина прямым операторным исчислением неполных фурье-преобразований. Это требует перенормировки затравочной константы связи λ, как и для аналогичного точечного двумерного потенциала нулевого радиуса. Результат естественным образом зависит от масштабов энергий (длины), что свойственно эффективно двумерным полевым моделям.

Перенормированные функции Грина вычислены и представлены в эквивалентных формах в терминах однократных интегралов: римановых интегралов и интегралов, сходящихся в смысле главного значения по Коши. В качестве примера применения полученных результатов непертурбативно вычислены перенормированные вакуумные средние квадрата поля $\langle \phi^2(x) \rangle$ и оператора тензора энергии-импульса $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$, вычисленные в виде однопараметрических интегралов $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ и их производных.

Рассмотренную модель можно считать важнейшим шагом к построению последовательной теории непертурбативного исследования эффектов поляризации вакуума в окрестности космической струны.

Автор благодарит проф. Ю. В. Граца за ряд высказанных замечаний и предложений.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова

[1] *Соколов Д.Д., Старобинский А.А.* // Докл. АН СССР, **234**:5, 1043 (1977). (Sokolov D.D., Starobinsky A.A. // Sov. Phys. Dokl. **22**, 312 (1977)).
[2] *Allen B., Ottewill A.C.* // Phys. Rev. D **42**, 2669 (1990).
[3] *Kay B., Studer U.M.* // Comm. Math. Phys. **139**, 103 (1991).
[4] *Allen B., Kay B.S., Ottewill A.C.* // Phys. Rev. D **53**, 6829 (1996).
[5] *Khusnutdinov N.R., Khabibullin A.R.* // Gen.Rel.Grav. **36**, 1613 (2004).
[6] *Katanaev M.O., Volovich I.V.* // Annals Phys. **216** 1 (1992).
[7] *Grats Y.V., Spirin P.* // Eur. Phys. J. C, **77**, 101 (2017).
[8] *Демков Ю.Н., Островский В.Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Изд-во ЛГУ, 1975. (*Demkov Yu.N., Ostrovskii V.N.* // Zero-range potentials and their applications in atomic physics, Plenum Press, New York and London, 1988.)
[9] *Мамаев С.Г., Трунов Н.Н.* // Изв. вузов (Физика) **7**, 9 (1980). (*Mamaev S.G., Trunov N.N.* // Russ. Phys. J. **23**, 551 (1980)).
[10] *Grats Y.V., Spirin P.* // Phys. Rev. D **108** (4), 045001 (2023).
[11] *Grats Y.V., Spirin P.* // MDPI Physics, **5**, 1163 (2023).
[12] *Грац Ю.В., Спирин П.* // ЖЭТФ **165** (1), 43 (2024).
[13] *Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ **38** (3), 819 (1960). (*Zel'dovich Ya.B.* // JETP **11**, 594 (1960)).
[14] *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* // Докл. АН СССР, **137**:5, 1011 (1961) (*Berezin F.A., Faddeev L.D.* // Soviet Math. Dokl. **2**, 372 (1961)).
[15] *Grats Y.V., Spirin P.* // Int. J. Mod. Phys. A **35** N02-N03, 2040030 (2020).
[16] *Grats Y.V., Spirin P.* // Universe **7**, 127 (2021). https://doi.org/
[17] *Albeverio S., Gesztesy R., Hoegh-Krohn R., Holden H.* Solvable Models in Quantum Mechanics. World Scientific: Singapore, 1995.
[18] *Gitman D.M., Tyutin I.V., Voronov B.L.* Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics. Springer: New York, 2012.
[19] *Рид М., Саймон Б.* // Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. (*Reed M., Simon B.* // Methods of Modern Mathematial Physics. II. Fourier Analysis. Self-Adjointness. (Academic-Press, New-York-London, 1975)).
[20] *Jackiw R.W.* // Diverse Topics in Theoretical and Mathematical Physics, Advanced Series in Mathematical Physics. World Scientific, Singapore, 1995, Sec.13.
[21] *Grats Y.V., Spirin P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **77** (2), 448 (2022).
[22] *Grats Y.V., Spirin P.* // Eur. Phys. J. Plus **140** 148 (2025).
[23] *Грац Ю.В., Спирин П.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. **79**(4), 2440101 (2024) (*Grats Y.V., Spirin P.A.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **79** 4, 426 (2024).)
[24] *Grats Y.V., Spirin P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **80**

(2025), *в печати*.

[25] *Грац Ю.В., Спирин П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. **80**, № 6. 2560102 (2025).

[26] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. (*Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* // Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press, New York, 2007).

[27] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* // Интегралы и ряды Т. 2. Специальные функции М: Физматлит, 2003. (*A.P.Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev* Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions. Gordon & Breach Sci. Publ., New York, (1986)).

[28] *Биррелл Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984. (*Birrell N.D., Davies P.C.W.* Quantum Fields in Curved Space. Cambridge University Press, 1982).

Zero-Range Linear Potential in Three-Dimensional Space and Vacuum Polarization Effects

P. Spirin

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: salotop@list.ru

A non-perturbative computation is proposed for the renormalised Green's function of a massless real-valued scalar field ϕ on the background generated by a two-dimensional zero-range potential localised on an infinite straight line. Such a potential corresponds to the exotic limit $\xi \to \infty$, $\beta' \sim 1/\xi$ of the vacuum polarisation problem near a cosmic string. The approach implies the renormalisation of the delta-coupling constant λ. The renormalised Euclidean and Hadamard Green's functions are presented in equivalent forms as single-variable integrals with integrands being transcendent functions. Using the renormalised Hadamard function, the renormalised vacuum expectation values of the field squared and of the energy-momentum tensor operator are computed. Asymptotic cases are analysed in detail.

PACS: 11.10.Gh, 02.90.+p, 12.90.+b
Keywords: linear defect, delta-like potential, vacuum polarization, coupling renormalization.
Received 17 November 2025.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2026. **81**, No. 1. Pp. .

Сведения об авторе
Спирин Павел Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: 495 939-53-89, e-mail: salotop@list.ru.