

Обратная задача восстановления изображений в многоканальной оптической системе

Е.И. Киселев,^{1,*} А.В. Разгулин,^{2,†} Н.Г. Ирошников^{1,2,‡}

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 02.11.2025; после доработки 03.12.2025; подписана в печать 03.12.2025)

Рассматривается обратная задача восстановления многоканального изображения, искажённого вследствие дефокусировки и сопутствующей ей хроматической аберрации. Такая постановка возникает в прикладных задачах офтальмологии, связанных с диагностикой живых структур глаза человека оптическими методами *in vivo*. Предложена математическая модель, описывающая формирование многоканального изображения на основе системы интегральных уравнений типа свёртки. Для решения некорректной обратной задачи восстановления многоканального изображения разработан алгоритм на основе неявного итерационного метода в сочетании с правилом выбора локализованного по частотам параметра итерационного метода и критерием останова. Результаты работы программной реализации предложенного метода позволяют судить о его эффективности в обратной задаче восстановления многоканального изображения, в том числе для случая изображений большого разрешения, характерных для медицинских приложений.

PACS: 42.15.Fr, 42.30.-d, 42.30.Kq, 42.30.Lg, 42.30.Va, 42.30.Wb, 42.62.Be, 42.66.Ct. УДК: 535

Ключевые слова: уравнение свертки, восстановление изображений, многоканальные изображения, дефокусировка, хроматическая аберрация, деконволюция, регуляризация.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.81.2610402](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.81.2610402)

ВВЕДЕНИЕ

В современной офтальмологии диагностика различных заболеваний глаза, основанная на анализе глазного дна с использованием изображений с фундус-камеры, может быть затруднена из-за наличия в оптической системе различных аберраций. Это может быть вызвано как заболеванием, например катарактой, так и операцией по замене хрусталика на линзу, которая может в зависимости от своего строения вносить различные аберрации в оптическую систему. При этом на получаемом трёхканальном изображении присутствует искажение цветовой гаммы, называемое хроматической аберрацией, что вызвано неравномерным искажением различных каналов изображения. Такие эффекты являются нежелательными, и ставится задача их компенсации.

В настоящей работе исследуется вопрос восстановления многоканальных изображений в стандартном формате RGB. Математическая постановка задачи восстановления многоканального изображения объекта, который излучает в видимом спектре, записывается с помощью двумерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода типа свертки.

При этом функции, входящие в это двумерное интегральное уравнение, зависят не только от двумерных координат, но и от длины волны. Указанное уравнение описывает процесс прохождения сигнала от объекта через оптическую систему. Именно на этом этапе возникают различные аберрации, которые определяют зависящее от длины волны ядро интегрального уравнения, называемое функцией рассеяния точки (ФРТ/PSF — point spread function). В качестве такого типичного представителя классической аберрации оптической системы рассматривается дефокусировка, принципиальная особенность которой состоит в том, что PSF при большой дефокусировке имеет сильно осциллирующий характер, существенно отличающий ее от традиционно используемых упрощенных моделей размытия, которые обычно сводятся к цилиндру ([1–4]) или гауссовой функции ([5–10]). PSF в приближении геометрической оптики можно встретить не так часто [11–14]. При этом такие физические корректные модели более точны, поэтому в настоящей работе был выбран подход, аналогичный [13, 14], с той лишь разницей, что оптическая система рассматривается в приближении Френеля с учётом зрачка.

В современной литературе большинство публикаций, связанных с восстановлением многоканальных изображений, обычно рассматриваются в контексте специфических приложений в микроскопии и медицине. Многие из них используют как упрощён-

* E-mail: kiselyovei@yandex.ru

† E-mail: razgulin@cs.msu.ru

‡ E-mail: nikita@optics.ru

ные модели PSF, так и упрощённые модели формирования каналов изображения, не подразумевающие какой-либо взаимосвязи между ними. Например, в [15, 16] используется модель функции рассеяния точки в виде цилиндра, а каналы изображения обрабатываются независимо. Последнее является упрощением процесса формирования многоканального изображения и не позволяет эффективно бороться с хроматической абберацией. Тем не менее бывают и более специфические случаи двухканальных медицинских изображений клеток [17], когда требуется более точная модель PSF. Поэтому ядро уравнения аппроксимируется исходя из отдельного эксперимента, в котором получают параметры оптической системы для используемого микроскопа. При этом в процессе восстановления используется информация о взаимосвязи каналов, полученная с помощью коллокации. Такой подход даёт адекватные результаты и показывает важность взаимосвязи каналов реконструируемого изображения. В самых свежих публикациях подобный подход становится всё более распространённым, например в [18], где авторы используют теорию кватернионов для описания искажения изображения, важность взаимосвязи каналов и вопрос применимости методов обработки монохромного изображения к цветному выделены особо.

Также рассматриваемую задачу решают и с помощью методов машинного обучения. Так, в [19] для этого используется комбинация обученного классического алгоритма и нейронной сети. Алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе производится деконволюция, где ядро аппроксимируется гауссовой функцией на основе данных о большом числе линз. На втором этапе нейронная сеть удаляет горизонтальные хроматические абберации, которые не восстанавливаются на первом этапе. Используемая в методе модель формирования изображения фокусируется по большей части на абберациях, не связанных с дефокусировкой. Упрощенный выбор ядра обусловлен требованием к скорости работы алгоритма. Аналогичный подход комбинирования классического алгоритма регуляризации Тихонова и нейронной сети можно найти в [20]. В обеих работах ([19, 20]) каналы изображения фактически обрабатываются независимо. Отметим также более специфические подходы к компенсации хроматических аббераций, например основанные на геометрической деформации изображения [21].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Взаимодействие объекта с оптической системой описывается в виде интегрального уравнения типа свёртки:

$$Av = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x - s_1, y - s_2, \lambda) \times v(s_1, s_2, \lambda) ds_1 ds_2 = u(x, y, \lambda), \quad (1)$$

где $u(x, y, \lambda)$ — наблюдаемая (искажённая) интенсивность, $h(x, y, \lambda)$ — аппаратная функция прибора, характеризующая его отклик на объект (PSF — point spread function), $v = v(x, y, \lambda)$ — интенсивность искомого реконструируемого объекта, который излучает в видимом спектре на длине волны λ .

После прохождения оптической системы сигнал $u(x, y, \lambda)$ фиксируется на детекторе, который формирует 3-х канальное изображение в формате RGB по следующему закону:

$$u_j(x, y) = \int_{\mathbb{R}} u(x, y, \lambda) S_j(\lambda) d\lambda, \quad j = 0, 1, 2, \quad (2)$$

где $S_0(\lambda)$, $S_1(\lambda)$, $S_2(\lambda)$ — весовые функции, j — номер канала изображения (0 — R, 1 — G, 2 — B).

Вообще говоря, волновой фронт, дошедший до детектора, может зависеть не только от его внутреннего устройства, но и от фильтров, установленных перед детекторами (фильтр пропускает сигнал только на заданных его конструкцией длинах волн), и спектра источника света. В этом случае в предлагаемой постановке достаточно положить

$$S_j(\lambda) = s_j(\lambda) \cdot I(\lambda) \cdot f(\lambda),$$

где $s_j(\lambda)$ — функция детектора, $I(\lambda)$ — спектр источника, $f(\lambda)$ — функция, описывающая действие фильтра ($\equiv 1$, если фильтр перед объективом не стоит).

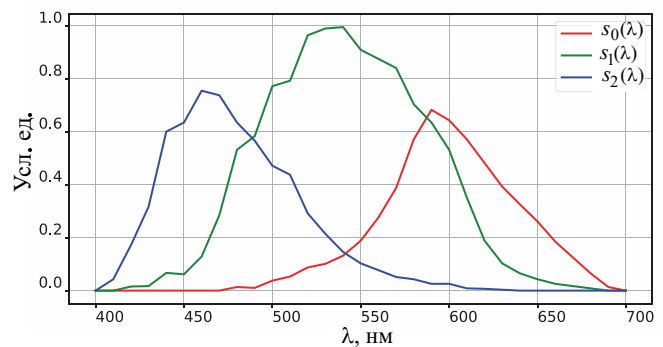


Рис. 1. Функции $s_i(\lambda)$ на примере фотокамеры Canon 5D Mark III [22]

Как видно из рис. 1, носители $s_j(\lambda)$, вообще говоря, могут перекрываться, и приходится говорить об «общем» носителе, являющемся их объединением. Обычно $s_j(\lambda)$ даны в неоткалиброванном виде и представляют физический отклик сенсора на волну заданной длины. Чтобы получаемое изображение соответствовало субъективному восприятию цвета человеком, необходимо добавить нормировочный коэффициент. Калибровка детектора, вообще говоря, может быть неизвестной или трудно получаемой. Тем не менее калибровку системы для конкретного изображения можно получить исходя из цветовой гаммы или, другими словами, отношения интенсивностей каналов этого изображения. В настоящей работе под «отношением интенсивностей»

понимается тройка из максимумов интенсивностей каждого канала:

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} u_0(x,y), \quad \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} u_1(x,y), \quad \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} u_2(x,y).$$

В силу (2) каждый канал изображения, вообще говоря, по-своему взвешивает $h(x,y,\lambda)$ и, следовательно, распределение искажений между $u_j(x,y)$ будет неравномерным. Это, в свою очередь, приводит к появлению **хроматической аберрации** — изменению цветовой гаммы изображения, особенно на контрастных краях.

$$u_i(x,y) = \sum_{j=0}^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x-s_1, y-s_2, \lambda) S_i(\lambda) S_j(\lambda) d\lambda \right) v_j(s_1, s_2) ds_1 ds_2.$$

Введём обозначение:

$$h_{i,j}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y,\lambda) S_i(\lambda) S_j(\lambda) d\lambda, \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (4)$$

В результате приходим к системе уравнений типа свёртки

$$\begin{cases} u_0(x,y) = \sum_{j=0}^2 \iint_{\mathbb{R}^2} h_{0,j}(x-s_1, y-s_2) v_j(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \\ u_1(x,y) = \sum_{j=0}^2 \iint_{\mathbb{R}^2} h_{1,j}(x-s_1, y-s_2) v_j(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \\ u_2(x,y) = \sum_{j=0}^2 \iint_{\mathbb{R}^2} h_{2,j}(x-s_1, y-s_2) v_j(s_1, s_2) ds_1 ds_2. \end{cases} \quad (5)$$

Полученную систему удобно рассматривать в спектральном пространстве. Введём следующие обозначения:

$$U_i(\omega, \nu) = \mathcal{F}(u_i(x,y)), \quad V_j(\omega, \nu) = \mathcal{F}(v_j(x,y)), \\ H_{i,j}(\omega, \nu) = \mathcal{F}(h_{i,j}(x,y)), \quad i, j = 0, 1, 2,$$

где \mathcal{F} — прямое преобразование Фурье, задаваемое формулой:

$$Q(\omega, \nu) = \mathcal{F}(q(x,y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} q(x,y) e^{-i(x\omega + y\nu)} dx dy.$$

Обратное преобразование Фурье задаётся следующим образом:

$$q(x,y) = \mathcal{F}^{-1}(Q(\omega, \nu)) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} Q(\omega, \nu) e^{i(x\omega + y\nu)} d\omega d\nu.$$

С помощью теоремы о свёртке система интегральных уравнений (5) записывается в виде системы линейных алгебраических уравнений в спектральном пространстве:

$$\begin{cases} U_0(\omega, \nu) = \sum_{j=0}^2 H_{0,j}(\omega, \nu) V_j(\omega, \nu), \\ U_1(\omega, \nu) = \sum_{j=0}^2 H_{1,j}(\omega, \nu) V_j(\omega, \nu), \\ U_2(\omega, \nu) = \sum_{j=0}^2 H_{2,j}(\omega, \nu) V_j(\omega, \nu). \end{cases} \quad (6)$$

1.1. Оптическая передаточная функция

В настоящей работе интегральное уравнение (1) используется для моделирования изображающей

Для получения замкнутой модели будем предполагать, что исходный объект представляется аналогично (2) в виде линейной комбинации 3 интенсивностей:

$$v(x,y,\lambda) = \sum_{j=0}^2 v_j(x,y) S_j(\lambda). \quad (3)$$

Соотношения (1), (2) и (3) позволяют записать зависимость каналов наблюдаемого изображения от каналов исходного в следующем виде:

оптической системы в приближении Френеля с учётом зрачка [23]. Соответствующее ядро интегрального уравнения (PSF) имеет вид:

$$h(x,y,\lambda) = \left| \mathcal{F}(P(x,y,R) \cdot e^{i \cdot a \cdot (\lambda - \lambda_0) \cdot (x^2 + y^2)}) \right|^2, \quad (7)$$

где $P(x,y,R) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$ — индикаторная функция зрачка; a — коэффициент дефокусировки; λ — длина волны; λ_0 — длина волны, на которую сфокусирована оптическая система; $i^2 = -1$. При $\lambda = \lambda_0$ функция рассеяния точки состоит только из индикаторной функции зрачка. Если $\lambda \neq \lambda_0$, то возникает аберрация, вызванная ошибкой фокусировки. Вообще говоря, λ_0 может находиться за пределами общего носителя функций детекторов. В этом случае все каналы будут не в фокусе.

Остановимся на вопросе калибровки системы (6) с целью сохранения цветовой гаммы изображения, т.е. отношения максимумов $u_i(x,y)$. Во-первых, отметим, что для случая монохромного изображения вводится понятие оптической передаточной функции (OTF — optical transfer function) (см. [23]):

$$H(\omega, \nu) = \frac{\mathcal{F}(h)(\omega, \nu)}{\mathcal{F}(h)(0, 0)}.$$

Во-вторых, учтём, что в такой нормировке $\max_{(\omega, \nu)} H_{i,j}(\omega, \nu) = 1$. Кроме того, как показали численные эксперименты, максимумы $H_{i,j}(\omega, \nu)$ и $u_i(x,y)$ после решения прямой задачи совпадают. Это приводит к тому, что все каналы

$u_i(x, y)$ имеют одинаковый максимум, и, как следствие, изображение теряет цветовую гамму. Однако из (4) видно, что отношение интенсивностей сохраняется, если $\max_{(x,y)} u_i(x, y) = \max_{(x,y)} v_i(x, y) \cdot \sum_{j=0}^2 \max_{(x,y)} v_j(x, y)$, т.е. необходимо, чтобы $\max_{(\omega,\nu)} H_{i,j}(\omega, \nu) = \max_{(x,y)} v_i(x, y) \cdot \max_{(x,y)} v_j(x, y)$. Этого можно достичь с помощью нормировки

$$H_{i,j}(\omega, \nu) = \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{\mathcal{F}(h_{i,j})(\omega, \nu)}{\mathcal{F}(h_{i,j})(0, 0)},$$

где $\alpha_i = \begin{cases} \max_{(x,y)} v_i(x, y), \\ \max_{(x,y)} u_i(x, y) \end{cases}$ в зависимости от того, решается ли прямая или обратная задача для системы (6).

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Чтобы решить обратную задачу для системы (6), состоящую в нахождении $V(\omega, \nu) = (V_1(\omega, \nu), V_2(\omega, \nu), V_3(\omega, \nu))^T$ по из-

$$\begin{aligned} \tilde{V}^k(\omega, \nu) = (E + \mu(\omega, \nu) \cdot \tilde{H}^*(\omega, \nu) \tilde{H}(\omega, \nu))^{-1} \cdot \tilde{V}^{k-1}(\omega, \nu) + \\ + \mu(\omega, \nu) \cdot (E + \mu(\omega, \nu) \cdot \tilde{H}^*(\omega, \nu) \tilde{H}(\omega, \nu))^{-1} \tilde{H}^*(\omega, \nu) \tilde{U}(\omega, \nu), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\tilde{H}^*(\omega, \nu)$ — сопряжённая к $\tilde{H}(\omega, \nu)$ матрица, E — единичная матрица, $\mu(\omega, \nu) > 0$ — параметр итерационного метода; k — номер итерации, $\tilde{V}^0(\omega, \nu)$ — нулевой вектор.

Итерационный метод (8) в сочетании с правилом выбора количества итераций — параметра регуляризации в зависимости от уровня погрешности входных данных — задает регуляризирующий оператор при любом положительном $\mu(\omega, \nu)$ (см., например, [25], гл. 2, п. 1). При практическом применении итерационного метода (8) важное значение имеет выбор параметра итерационного метода $\mu(\omega, \nu)$. Как отмечено в [25], с. 35, этот параметр влияет на скорость аппроксимации метода. Ясно, что при выборе общего параметра для всех частот качество восстановления высокочастотных и низкочастотных гармоник отличается и не может быть одновременно хорошим. В связи с этим, а также имея в виду желание повысить устойчивость метода к влиянию шума, параметр итерационного метода выбирается локальным по частотам в зависимости от типа шума на изображении.

Вообще говоря, на изображении может присутствовать множество различных шумов в зависимости от условий съёмки: гауссов шум, пуассоновский шум, импульсный шум [28] и т.д. В настоящей работе предполагается, что основное инвазивное влияние на качество получаемого изображения оказывает пуассоновский шум. Отличительной особенностью такого типа шума является его зави-

вестным $H_{i,j}(\omega, \nu)$ при неточно заданном $U(\omega, \nu) = (U_1(\omega, \nu), U_2(\omega, \nu), U_3(\omega, \nu))^T$, рассмотрим уравнения этой системы как СЛАУ $\tilde{H}(\omega, \nu) \cdot \tilde{V}(\omega, \nu) = \tilde{U}(\omega, \nu)$ в каждой точке (ω, ν) с матрицей

$$\tilde{H}(\omega, \nu) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(\omega, \nu) & H_{0,1}(\omega, \nu) & H_{0,2}(\omega, \nu) \\ H_{1,0}(\omega, \nu) & H_{1,1}(\omega, \nu) & H_{1,2}(\omega, \nu) \\ H_{2,0}(\omega, \nu) & H_{2,1}(\omega, \nu) & H_{2,2}(\omega, \nu) \end{bmatrix}.$$

Особенность матриц $\tilde{H}(\omega, \nu)$ состоит в том, что возможен разброс собственных значений в диапазоне от значений порядка 10^{-16} до порядка единицы. В этой ситуации прямые методы малоприменимы из-за неустойчивости к возможным погрешностям вычисления матриц и правых частей. Устойчивое к погрешностям исходных данных решение может быть получено на основе построения регуляризирующего оператора (см. [24], [25], [26] и др.). В нашем случае был выбран неявный итерационный метод, успешно применявшийся ранее для решения задачи оптического секционирования трехмерного изображения в модели широкоугольной изображающей системы [27]:

симось от регистрируемого сигнала [29]. Поэтому параметр итерационного метода $\mu(\omega, \nu)$ выбирается исходя из спектра наблюдаемого изображения. Поскольку шум в каждом канале согласно (6) так или иначе смешивается, используется спектр линейной комбинации каналов наблюдаемого изображения (см. [30, 31]):

$$\begin{aligned} U_G(\omega, \nu) = \mathcal{F}(0.299 \cdot u_0(x, y) + \\ + 0.587 \cdot u_1(x, y) + 0.144 \cdot u_2(x, y)). \end{aligned}$$

С учётом этого выражение для параметра итерационного метода имеет вид:

$$\mu(\omega, \nu) = (U_M - U_E(\omega, \nu) + m) \cdot s,$$

где $U_E(\omega, \nu) = \log(1 + |U_G(\omega, \nu)|^2)$ — нормированный энергетический спектр $U_G(\omega, \nu)$, $U_M = \max_{(\omega,\nu) \in \mathbb{R}^2} U_E(\omega, \nu)$, m — параметр, s — масштабирующий коэффициент. Параметры m , s подбираются эмпирически для конкретных классов изображений.

Поскольку от любых методов, рассчитанных на применение в медицинских приложениях, требуют высокую производительность, ожидается, что такие методы имеют либо небольшую вычислительную сложность, либо широкие возможности по оптимизации, в том числе с использованием параллельных вычислений. Сам по себе предложенный алгоритм вычислительно сложный. Однако в каждой точке спектрального пространства (ω, ν)

фактически независимо от других точек решается СЛАУ 3 на 3. Таким образом, граф алгоритма предложенного метода представляет собой N^2 (N — размер изображения) узлов, в каждом из которых решается небольшая СЛАУ. Такой алгоритм легко переносится на архитектуру графического процессора. Например, разработанная нами реализация предлагаемого метода, работающая на NVIDIA 3080, восстанавливает изображение размером 3534×3534 приблизительно за 10.5 с (против нескольких десятков минут у последовательной реализации).

2.1. Критерий останова

Остановимся на описании правила останова итерационного алгоритма, т.е. выборе количества итераций метода k_0 , который является параметром регуляризации. Различные методы выбора параметра регуляризации обычно основаны на использовании информации об уровне погрешности входных данных (см., например, [24], [26], [25] и др.). Вместе с тем во многих случаях информация об уровне погрешности недоступна. В таких случаях приходится использовать эмпирические методы, при формулировке которых требования согласования параметра регуляризации с погрешностью данных учитывается опосредованно, на основе анализа текущих итераций.

В рассматриваемом нами случае на каждой итерации вычисляется норма невязки $F(v^k) = \|Av^k - u\|_{L_2}$, где $v^k = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{V}^k(\omega, \nu))$ — изображение, полученное на k -й итерации. Далее в диапазоне $k \in 1, \dots, k_1$ для некоторого $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 > 1$ по данным вычисленным значениям $F(v^k)$ строится нижняя огибающая $F_{env}(v^k)$, $k = 1, \dots, k_1$. Если существует единственный $k_m = \min_{k \in [1, k_1]} F_{env}(v^k)$ и $k_m \in [1, k_1]$, то $k_0 = k_m$ и метод завершает свою работу. Иначе вычисления продолжают до нахождения такого k_0 или достижения заранее заданного максимального числа итераций.

Наши исследования показали, что описанное выше правило хоть и является эмпирическим, однако в случае отсутствия информации об уровне погрешности наблюдений дает вполне адекватные результаты. С одной стороны, удается скомпенсировать влияние дефокусировки и связанную с ней хроматическую аберрацию, с другой стороны, значительное превышение количества выполненных итераций относительно найденного значения k_0 приводит к возвращению хроматической аберрации и появлению заметных хроматических шумов.

На рис. 2 представлены типичные профили $F(v^k)$ и $F_{env}(v^k)$, построенные для изображения периодических секторов рис. 2, а и фотографии глазного дна рис. 2, б, которые были получены с помощью фотокамеры (см. рис. 4, б и 5, б). Чтобы получить наглядный график, алгоритм не был остановлен по нахождению k_m и выполнял итерации до дости-

жения их заранее заданного максимального числа. Видно, что нижняя огибающая $F_{env}(v^k)$ позволяет однозначно определить k_m , несмотря на наличие пуассоновского шума, так как она имеет всего один глобальный минимум, который легко определяется в процессе работы алгоритма.

2.2. Восстановление параметра дефокусировки

При практическом использовании описанного выше метода нужно иметь в виду, что $H_{i,j}(\omega, \nu)$, вообще говоря, неизвестно и его требуется восстановить с помощью наблюдаемого изображения в рамках используемой модели. Сделать это можно на основе развития разработанного нами в [32] алгоритма восстановления параметра дефокусировки для случая монохромных изображений. Для случая многоканальных изображений алгоритм состоит из следующих 6 шагов.

На **1-м** шаге вычисляется спектр каждого канала наблюдаемого изображения, усредненный по углу:

$$U_i^a(r) = \arctg \left((k_i \cdot r + b_i) \cdot \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} |U_i(r, \phi)| d\phi \right), \quad i = 0, 1, 2, \quad (9)$$

где k_i, b_i — параметры.

Далее находятся все локальные минимумы $U_i^a(r)$. Для этого сначала значения $U_i^a(r)$ в точках минимума приближаются к нулю с помощью нормировка на нижнюю огибающую $U_i^{env}(r)$. В качестве такой огибающей используется граница минимальной выпуклой оболочки, находящейся «ниже» $U_i^a(r)$. Нахождение минимальной выпуклой оболочки является стандартной процедурой, реализация которой имеется во многих стандартных программных пакетах. В настоящей работе использовался класс *ConvexHull* модуля *spatial* библиотеки *scipy* языка *Python*. Таким образом на **2-м** шаге требуется найти $U_i^{env}(r)$, $i = 0, 1, 2$.

На **3-м** шаге $U_i^a(r)$ нормируется с использованием огибающей:

$$U_i(r) = \min_{r' \in [0, \pi]} \sqrt{(U_i^a(r) - U_i^{env}(r'))^2 + (r - r')^2}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (10)$$

На **4-м** шаге для $U_i(r)$ находятся точки локального минимума, близкие к 0 при $r \in [0, r_0]$ (с помощью r_0 фильтруется шум на высоких частотах). В итоге получается набор координат $\{r_{l_1}^0\}$, $l_1 = \overline{1, L_1}$. Обозначим за $\{r_{l_2}^0\}_{a, \lambda_0}$ набор нулей ОТФ с параметром дефокусировки a и некоторым λ_0 , где $l_2 = \overline{1, L_2}$. Первое множество отсортировано в порядке возрастания координаты; второе — по возрастанию параметра дефокусировки и затем также в порядке возрастания координаты.

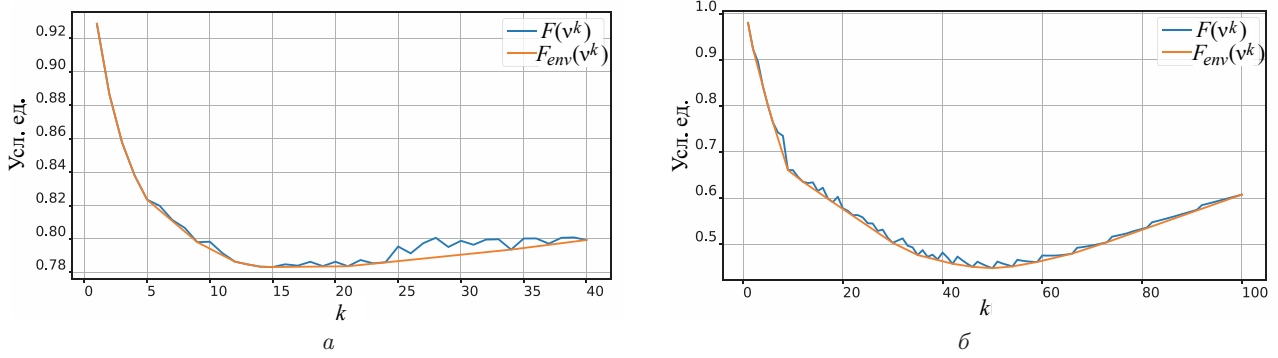


Рис. 2. Профили $F(v^k)$ и $F_{env}(v^k)$ для изображения периодических секторов (а) и фотографии глазного дна (б)

На **5-м** шаге вычисляется набор координат $\{r_{l_2}^0\}_{a, \lambda_0}$ по радиальной составляющей действительной части ОТФ. Для ускорения вычисления была предложена следующая модификация формулы быстрого вычисления радиальной составляющей действительной части ОТФ из [33]:

$$H_i(r, a, \lambda_0) = \sum_{j=0}^2 \int_{\mathbb{R}} H_{i,j}(r, a, \lambda, \lambda_0) S_i(\lambda) d\lambda, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$H_{i,j}(r, a, \lambda, \lambda_0) = \int_0^{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\pi^2}}} \frac{1}{a \cdot (\lambda - \lambda_0) \cdot r} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{4 \cdot a \cdot (\lambda - \lambda_0) \cdot r}{\pi} \cdot \left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{r}{\pi}\right)\right) dx.$$

На последнем **6-м** шаге алгоритма параметры a и λ_0 вычисляются путём минимизации следующего функционала:

$$F(a, \lambda_0) = \sum_{i=0}^2 \left(\xi \cdot \sum_{r \in \{r_{l_2}^0\}_{a, \lambda_0}} |H_i(r, a, \lambda_0)| + \right.$$

$$\left. + \eta \cdot \sum_{r \in \{r_{l_1}^0\}} U_i(r) \right), \quad (11)$$

где ξ, η — параметры, значения которых можно подбирать эмпирически или использовать машинное обучение.

3. ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Таблица 1. Параметры изображающей системы

	Изображение периодических секторов	Изображение глазного дна
a	0.004	0.077
λ_0 (нм)	505	495

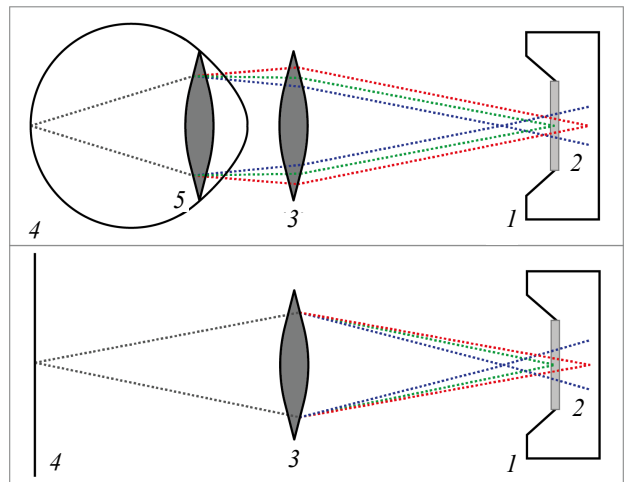


Рис. 3. Изображающая система для глаза человека и модельная изображающая система для фотокамеры Canon 5D Mark III. 1 — фотокамера, 2 — матрица, 3 — собирающая линза, 4 — объект (глаз человека или экран), 5 — хрусталик человеческого глаза

Таблица 2. Параметры итерационного метода

	Изображение периодических секторов	Изображение глазного дна
m	0.15	0.5
s	0.3	0.8
k_0	15	50

Вообще говоря, современные линзы позволяют устранять хроматическую абберацию за счёт сложной конструкции с разной оптической силой на каждом слое, однако хрусталик человеческого глаза таким свойством не обладает. Поэтому для моделирования оптических свойств хрусталика была взята стандартная собирающая линза. Эта линза устанавливалась на некотором расстоянии от камеры Canon 5D Mark III без объектива и других дополнительных линз. Таким образом, свет от объекта на пути к матрице камеры проходил только через собирающую линзу. Наблюдаемое изображение выводилось на экран компьютера для обеспечения равномерной освещённости. Размытие достигалось

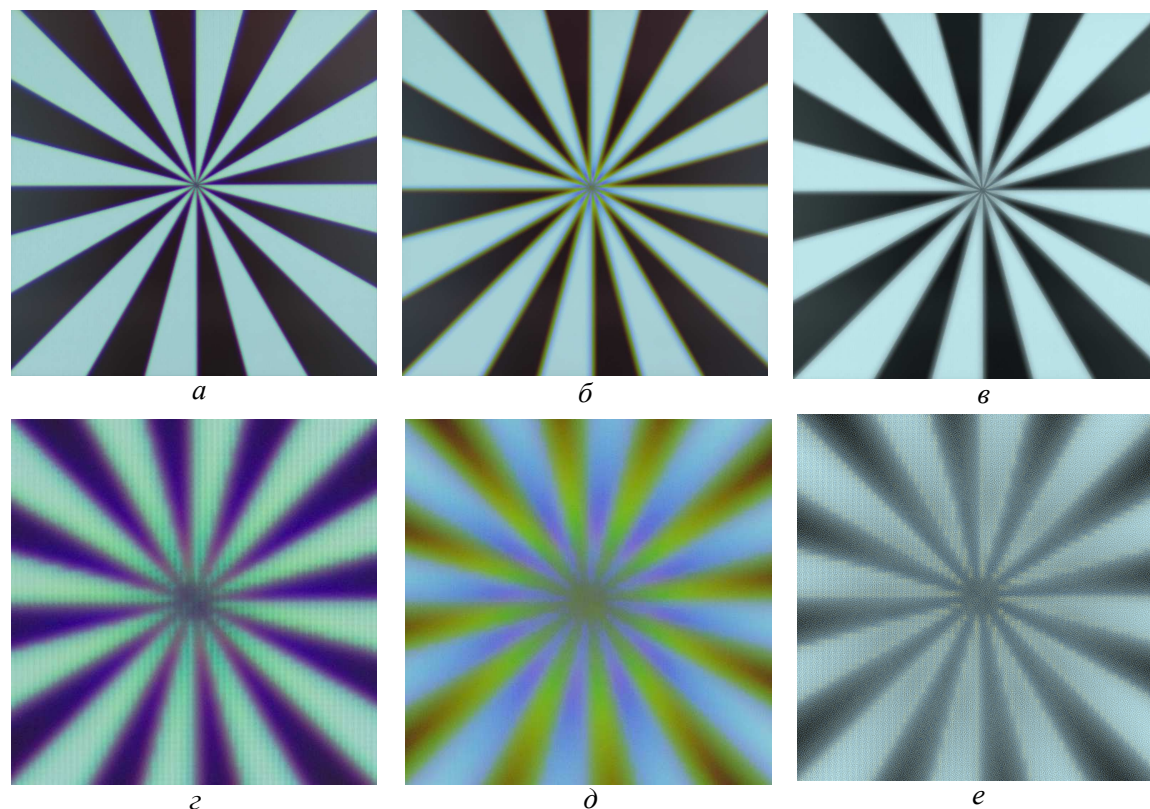


Рис. 4. Изображения периодических секторов: исходное — *a*, искажённое — *б* и восстановленное — *в*; *г, д, е* — увеличение в центре

путём сдвига линзы в сторону фотокамеры. Схема полученной таким образом изображающей системы представлена на рис. 3.

В качестве наблюдаемых объектов были использованы изображения периодических секторов (рис. 4, *a, г*) и фрагмента глазного дна в макулярной области (рис. 5, *a, г*). Для каждого из случаев эмпирически были получены параметры изображающей системы, представленные в табл. 1 (параметр дефокусировки a задан в условных единицах). Параметр k_0 (количество итераций) итерационного метода был найден с помощью алгоритма, предложенного в п. 3.1, для заданного набора m и s (также заданы в условных единицах), подобранного в ходе экспериментов (см. табл. 2).

Поскольку для формирования изображения использовалась одна собирающая линза, обладающая хроматической аберрацией, даже оптимально сфокусированные относительно зеленого канала изображения, (рис. 4, *a*; 5, *a*; 4, *г*; 5, *г*) демонстрируют хроматическую аберрацию в виде «радужных» границ, так как другие каналы оказываются дефокусированными. Данный эффект можно визуальнo усилить, если сместить линзу изображающей системы ближе к камере, тем самым внося дефокусировку. Тогда на получаемом изображении (рис. 4, *б*; 5, *б*; 4, *д*; 5, *д*) хроматическая аберрация становится значительно заметнее, т.к. появляется общая дефокусировка и можно заметить инверсию интенсивности (рис. 4, *д*). При этом на восстановленных изображе-

ниях (рис. 4, *в*; 5, *в*; 4, *в*; 5, *в*) видно отсутствие этих эффектов. Так у изображения периодических секторов (рис. 4, *в, е*) была устранена инверсия в центре и «радужные» границы. Также на контрастных участках изображений удалось добиться практически полного устранения хроматической аберрации. На фотографии глазного дна (рис. 5, *в, е*) видно увеличение четкости границ сосудов, а также лучшую детализацию части «утерянных» мелких сосудов. Это представляется важным для улучшения качества и сроков диагностики как офтальмологических заболеваний, так и заболеваний системного характера (таких как возрастная макулярная дегенерация или диабет), требующих получения изображений глазного дна с максимальным разрешением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена обратная задача восстановления многоканального изображения, искажённого вследствие дефокусировки и сопутствующей ей хроматической аберрации. Для описания процесса возникновения таких изображений была построена математическая модель формирования многоканального изображения. Для решения некорректной обратной задачи восстановления многоканального изображения был разработан алгоритм на основе неявного итерационного метода в спектральном пространстве, допускающий эф-

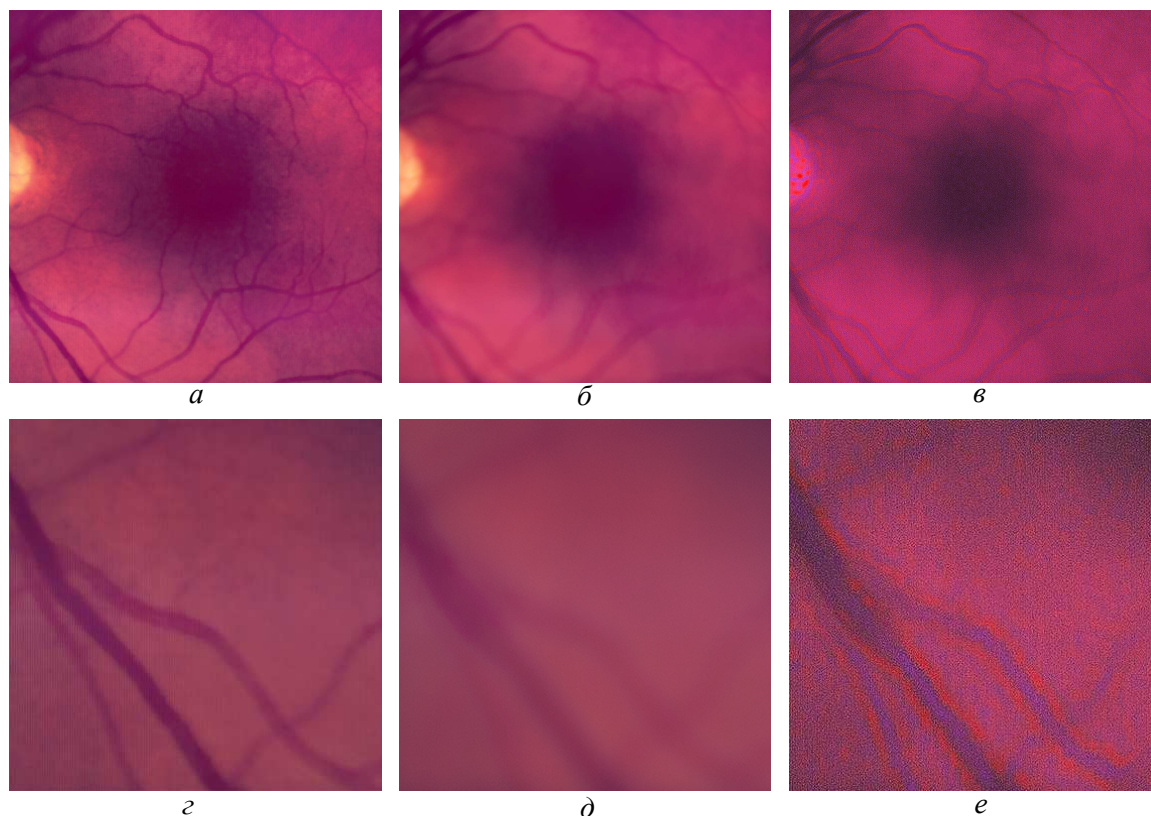


Рис. 5. Фотографии глазного дна: исходное — *а*, искажённое — *б* и восстановленное — *в*; *г*, *д*, *е* — увеличение в левом нижнем углу

фективное распараллеливание. Разработанная программная реализация прошла тестирование на различных зашумлённых данных, полученных в экспериментальной изображающей системе с управляемой дефокусировкой. Полученные результаты позволяют судить о высокой эффективности предлагаемого метода в задаче компенсации дефокусировки и сопутствующей хроматической аберрации для многоканальных изображений.

Некоторые результаты настоящей работы были представлены на Международной научной конфе-

ренции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2025» (см. [34]).

Работа второго автора (раздел 3) выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2025-345). Работа второго и третьего авторов (разделы 1,2,4) выполнены при поддержке программы развития МГУ, проект № 23 SCH06-20.

- [1] Gajjar R., Zaveri T. Pathak A. // International Journal of Electronics and Communication Engineering and Technology (IJECEET). **7**(4), 85 (2006).
- [2] M. Liang. // Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia. **39**, N 1. 333 (2016).
- [3] Oliveira J.P., Figueiredo M.A. T., Bioucas-Dias J.M. // IEEE Transactions on Image Processing. **23**, N 1. 466 (2014).
- [4] Lin H.Y., Chou X.H. // J. Opt. Soc. Am. A. **29**, N 8. 1694 (2012).
- [5] Zhuo S., Sim T. // Pattern Recognition. **44**, N 4, 1852 (2011).
- [6] Tang C., Hou C., Song Z. // Optics Letters. **38**, N 10. 1706 (2013).
- [7] Ahn J.H., Kim T.W., Pakk H.J. // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. **16**, 1941 (2015).
- [8] Sizikov V. // J. Opt. Technol. **82**, N 10. 655 (2015).
- [9] Sizikov V. S., Stepanov A. V., Mezhenin A. V. // J. Opt. Technol. **85**, N 4. 203 (2018).
- [10] Dong W., Du Y., Xu J. // Computers in Biology and Medicine. **147**, 105650 (2022).
- [11] Arandian A., Zibaii M.I., Latifi. H. // Optik. **302**, 171715 (2024).
- [12] Hanno S., Patrick R., Luis A. // Remote Sensing of Environment. **267**, 112718 (2021).
- [13] Бажитов, С.Д. О восстановлении параметра размытия в задаче оптического секционирования. Современные информационные технологии и ИТ-образование. **18**, N 1. 20–27 (2022).
- [14] Бажитов С.Д., Ларичев А.В., Разгулин А.В. и др. // Компьютерная оптика. **47**, N 5. 751 (2023).
- [15] Kang S.B. Automatic Removal of Chromatic

- Aberration from a Single Image. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Minneapolis, MN, USA*. 1 (2007).
- [16] Xu X., Liu H., Li Y., Zhou Y. Image Deblurring with Blur Kernel Estimation in RGB Channels. *IEEE International Conference on Digital Signal Processing (DSP), Beijing, China*. 681 (2016).
- [17] Thomas A., Sarah E., Megan K. Deconvolution and chromatic aberration corrections in quantifying colocalization of a transcription factor in three-dimensional cellular space. *University of British Columbia, Canada*. 41, N 6. 633 (2010).
- [18] Zhang H., Qi T., Zeng T. // *Journal of Scientific Computing*. 101, 27 (2024).
- [19] Thomas E., Jean-Michel M., Gabriele F. Fast Two-step Blind Optical Aberration Correction. *17th European Conference on Computer Vision, Tel Aviv, Israel*, 2022.
- [20] Pronina V., Lorente Mu A., Juan F. P. J. Abascal, Peyrin F., Dylov D. V. and Ducros N. *Optical Society of America*. 29, N 24. 39559 (2021).
- [21] Boulton, T.E., Wolberg, G. // Correcting chromatic aberrations using image warping. *Proceedings 1992 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 684 (1992).
- [22] Seung-Hwan B., Diego G., Min K. et al. // *ACM Transactions on Graphics*. 36, N 6. 1-12 (2017).
- [23] Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970.
- [24] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
- [25] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
- [26] Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
- [27] Razgulin A.V., Iroshnikov N.G., Larichev A.V. et al. Fourier domain iterative approach to optical sectioning of 3d translucent objects for ophthalmology purposes. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. XLII-2/W4, 173 (2017).
- [28] Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods. Digital Image Processing. Prentice Hall, 2008.
- [29] Schottky. W. // *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*. 17, N 4. 41001 (2018).
- [30] Poynton C. Digital Video and HD: Algorithms and Interfaces. Morgan Kaufmann, 2003.
- [31] Stokes M., Anderson M., Chandrasekar S. A Standard Default Color Space for the Internet sRGB. 1996.
- [32] Киселев Е.И., Разгулин А.В., Старостин А.С., Ирошников Н.Г., Ларичев А.В. Двухэтапный метод деконволюции дефокусированных изображений. Сборник трудов факультета ВМК «Прикладная математика и информатика». 78, 4–25 (2025).
- [33] Budzinskiy S., Razgulin A. V. // *Journal of the Optical Society of America A*. 36, N 3. 436-442 (2019).
- [34] Киселёв Е.И. Обратная задача восстановления изображений в многоканальной оптической системе. Ломоносов-2025: XXXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. Секция: медицинская физика. 15 апреля 2025.

Inverse Problem of Image Recovery in a Multichannel Optical System

E. I. Kiselyov^{1,a}, A. V. Razgulin^{1,b}, N. G. Iroshnikov^{2,c}

¹Department of Mathematical Physics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia

²Department of Medical physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University Moscow 119991, Russia

E-mail: ^akiselyovei@yandex.ru, ^brazgulin@cs.msu.ru, ^cnikita@optics.ru

The inverse problem of recovering a multichannel image distorted as a result of defocusing and the associated chromatic aberration is considered. This problem arises in applied problems of ophthalmology related to in vivo diagnostics of living structures of the human eye using optical methods. A mathematical model describing the formation of a multichannel image based on a system of integral equations of convolution type is proposed. To solve the ill-posed inverse problem of multichannel image recovery, an algorithm based on a modified implicit iterative Tikhonov regularisation method in combination with a selection rule for a frequency-localised regularisation parameter and a stopping criterion has been developed. The results of the software implementation of the proposed method make it possible to evaluate its effectiveness in the inverse problem of multichannel image recovery, including the case of high-resolution images characteristic of medical applications.

PACS: 42.15.Fr, 42.30.-d, 42.30.Kq, 42.30.Lr, 42.30.Va, 42.30.Wb, 42.62.Be, 42.66.Ct.

Keywords: convolution equation, image restoration, multi-channel images, defocus, chromatic aberration, deconvolution, regularization.

Received 02 November 2025.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2026. 81, No. . Pp. .

Сведения об авторах

1. Киселев Евгений Иванович — аспирант ВМК МГУ; e-mail: kiselyovei@yandex.ru.
2. Разгулин Александр Витальевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой математической физики факультета ВМК МГУ; тел.: (495) 939-23-65, e-mail: razgulin@cs.msu.ru.
3. Ирошников Никита Георгиевич — канд. физ.-мат. наук, доцент физического факультета МГУ; тел.: (495) 939-48-37, e-mail: nikita@optics.ru.