

Оптимизация орбитальных параметров космических аппаратов в задаче измерения гравитационного поля Земли

А.И. Филеткин^{1,*}

¹*Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (ГАИШ МГУ)
Россия, 119234, Москва, Университетский проспект, д. 13*

(Поступила в редакцию 20.06.2025; после доработки 20.10.2025; подписана в печать 21.11.2025)

Разработан аналитический метод оптимизации орбитальных параметров космической группировки для измерения гравитационного поля Земли (ГПЗ). Метод основан на поиске циклов повторяемости подспутниковых трасс при невозмущённом кеплеровском движении с условием кратности целого числа оборотов спутника за целое число узловых дней. Путём сопоставления результатов аналитического и численного подходов получена функциональная зависимость, позволяющая определять высоту орбиты космического аппарата с точностью до 30 м для возмущённого движения. В работе рассматриваются две временные шкалы интегрирования орбиты: полный цикл покрытия (30 дней) и подцикл (7 дней). Для найденных оптимальных конфигураций выполнено полномасштабное интегрирование орбитального движения и восстановление ГПЗ, что позволило оценить влияние орбитальных параметров на точность восстановленного поля.

PACS: 91.10.Sp УДК: 523

Ключевые слова: космическая группировка, оптимизация орбитальных параметров, восстановление ГПЗ.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.81.2610801](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.81.2610801)

ВВЕДЕНИЕ

Изучение гравитационного поля Земли (ГПЗ) с помощью спутниковых миссий играет ключевую роль в геодезии, геофизике и климатологии. Успешная реализация миссии GRACE [1] показала высокую её эффективность и вызвала интерес научного сообщества к построению моделей ГПЗ с более высоким пространственным и временным разрешением.

Однако качество восстановления ГПЗ существенно зависит от конфигурации орбиты группировки космических аппаратов (КА), в частности от высоты и наклонения, которые определяют равномерность покрытия поверхности Земли подспутниковыми трассами (измерениями).

Традиционно выбор конфигураций спутников проводится с помощью перебора орбитальных параметров на основе численного моделирования, учитывающего различные возмущающие факторы. Численные методы требуют значительных вычислительных затрат и не всегда позволяют получить аналитическое представление о зависимости параметров орбиты от условий наблюдений (за приемлемое время вычислений).

Три основных принципа определяют эффективность измерения гравитационного поля из космоса:

1. Высота орбиты спутника должна быть как

можно ниже, чтобы увеличить гравитационный сигнал, убывающий как $\sim r^{-2}$.

2. Период восстановления ГПЗ должен быть как можно короче, чтобы максимально увеличить временнёе разрешение моделей ГПЗ.
3. Покрытие подспутниковыми трассами должно быть достаточно плотным и однородным за период восстановления ГПЗ для достижения максимального пространственного разрешения.

В гравитационных спутниковых миссиях существуют две теоремы, которые определяют основные ограничения и компромиссы при восстановлении ГПЗ из спутниковых измерений в пространственной и временной областях [2, 3]. Во-первых, теорема о неопределенности, подобная теореме Гейзенберга, которая позволяет найти компромисс между пространственным D_{space} и временным D_{time} разрешением с помощью соотношения

$$D_{space} \times D_{time} = \frac{2\pi\alpha}{\beta} = const \quad (1)$$

таким образом, что их произведение является постоянной величиной (β — количество обращений спутника за период полного цикла α в сутках). Это означает, что увеличивая пространственное разрешение для одиночного спутника или однопарной группировки, временнёе будет уменьшаться и наоборот.

* E-mail: ai.filetkin@physics.msu.ru

Во-вторых, правило Коломбо–Найквиста (или аналог теоремы Котельникова)

$$\beta \geq 2n_{max} \text{ (или } 2m_{max}), \quad (2)$$

которое требует, чтобы количество обращений спутника было больше либо равно удвоенным максимальным степенем (n_{max}) и порядка (m_{max}) разложения при восстановлении ГПЗ. Следовательно, это правило ограничивает пространственное разрешение при восстановлении ГПЗ и означает, что гармоники с $n > n_{max}$ недостаточно точно измеряются из-за низкой частоты дискретизации, в результате чего высокочастотные компоненты сигнала «маскируются» (или «подмешиваются») в низкочастотные, создавая искажения решения. Пространственное разрешение, в свою очередь, связано с количеством обращений КА при равномерном покрытии поверхности Земли измерениями.

В настоящей работе рассмотрен аналитический метод оптимизации высоты и наклонения орбиты (без учета атмосферы), основанный на поиске циклов повторяемости (с условиями кратности целого числа оборотов спутника за целое число узловых дней в случае невозмущенного кеплеровского движения) подспутниковых трасс с учетом формул для вековых возмущений угловых элементов орбиты. Такой подход позволяет определить оптимальные орбитальные параметры, обеспечивающие равномерное покрытие поверхности Земли на коротких и длительных временных интервалах одновременно. Принципиальное отличие от метода перебора высоты и наклонений на сетке с фиксированным шагом [4] заключается в том, что существенно уменьшается количество вариантов для численного моделирования, позволяющих локализовать область поиска оптимальных орбитальных параметров с точки зрения самозамыкания подспутниковых трасс.

В работе рассматриваются две временные шкалы интегрирования орбитального движения: полный цикл покрытия (30 дней) и подцикл (7 дней). Для найденных оптимальных конфигураций проводится восстановление ГПЗ, что позволяет оценить и сравнить влияние орбитальных параметров на точность результатов.

Предложенный метод может быть полезен при проектировании будущих спутниковых миссий по измерению ГПЗ и мониторингу динамики геофизических процессов в различных оболочках Земли на любых заданных интервалах времени полного цикла и подцикла.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Согласно теореме (1) пространственное разрешение $D_{space} = 2\pi/\beta$ определяет угловое расстояние между подспутниковыми трассами на экваторе (как мера представления пространственного масштаба), а временное разрешение $D_{time} = \alpha$ определяет период повторяемости подспутниковых трасс

на поверхности Земли (как мера представления временного масштаба).

Один оборот КА вокруг Земли характеризуется узловым (или драконическим) периодом КА, который определяется как временной интервал между последовательными прохождениями через любой из одноименных узлов орбиты (либо восходящих, либо нисходящих).

Для удобства описания теории далее вводятся следующие параметры:

1. $\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ — количество обращений за 1 узловые сутки (для спутника на низкой околоземной орбите это значение $\sim 15 - 16$), где β — количество обращений за полный цикл повторяемости подспутниковых трасс, α — количество узловых дней в полном цикле повторяемости подспутниковых трасс.
2. $S = \frac{360^\circ}{\Gamma}$ — так называемый «фундаментальный интервал», определяющий угловое расстояние на экваторе между двумя последовательными (во времени) одноименными (либо восходящего, либо нисходящего) прохождениями узла орбиты (подспутниковые трассами) за один виток (один период обращения спутника).
3. $S_i = \frac{360^\circ}{\beta}$ — так называемый «фундаментальный субинтервал», определяющий угловое расстояние на экваторе между соседними (в пространстве) одноименными (либо только восходящего, либо только нисходящего) прохождениями узла орбиты (подспутниковые трассами) за весь интервал наблюдения α узловых суток (полный цикл). Используя выражения для «фундаментального интервала и субинтервала», можем получить, что при равномерном покрытии за α узловых дней полного цикла происходит заполнение «фундаментального интервала» S с шагом «фундаментального субинтервала» S_i , т.е. $S = \alpha S_i$.

Количество обращений за 1 узловые сутки можно записать иначе как $\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = I + \frac{N}{\alpha}$, где I — целая часть количества обращений за 1 узловые сутки, а $\frac{N}{\alpha}$ — дробная. Можем выразить дробную часть как $N = \alpha(\Gamma - I)$.

В пределах «фундаментального интервала» S_i последовательные прохождения одноименного узла орбиты с индексами k и $k + 1$ всегда будут отдалены друг от друга на угловые расстояния NS_i или $(\alpha - N)S_i$. Исходя из этого выделяют 2 типа орбит:

1. «Дрейфующие» орбиты, когда $N = 1$ или $N = \alpha - 1$;
2. «Перескакивающие» орбиты во всех остальных случаях для N .

В «дрейфующих» орбитах заполнение «фундаментального интервала» постепенное (последовательное) с большими экваториальными пропусками до момента окончания полного цикла, в то время как «перескакивающие» орбиты имеют более сложный и разнообразный шаблон покрытия, значительно быстрее уменьшая максимальный экваториальный пропуск. В связи с этим «перескакивающие» орбиты имеют большую вариативность (более широкий диапазон) пространственных и временных комбинаций покрытия.

Концепцию подциклов можно определить как самое минимальное количество узловых дней, за которое последнее пересечение одноименного восходящего узла проходит на экваторе на расстоянии S_i или $(\alpha - 1)S_i$ от самого первого, т.е. подспутниковые трассы не самозамыкаются, а проходят достаточно близко друг к другу (на расстоянии NS_i или $(\alpha - N)S_i$), обеспечивая равномерное покрытие за меньший промежуток времени, чем полный цикл, при котором происходит самозамыкание подспутниковых трасс.

В случае только центрально-симметричного поля (невозмущенного кеплеровского движения) плоскость орбиты КА фиксирована в пространстве в инерциальной системе координат. Изменение геодезической долготы узла орбиты КА на поверхности Земли обусловлено только вращением Земли и соотношение β/α в частном случае принимает вид

$$\Gamma_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{n_0}{\omega_E}, \quad (3)$$

где n_0 — невозмущенное среднее движение, ω_E — угловая скорость вращения Земли. В таком случае коэффициенты β_0, α_0 представлены целочисленными значениями и 1 узловые сутки соответствуют 1 солнечным суткам [5, 6].

В действительности из-за несферичности ГПЗ возникают вековые возмущения, обусловленные влиянием зональных гармоник. Под их действием орбита КА постепенно изменяет своё положение в пространстве вследствие прецессии линии узлов, прецессии линии апсид и изменения средней аномалии на эпоху.

Соотношение β/α , связанное с реальным движением спутника, может быть приближенно определено аналитической формулой с помощью добавления изменений кеплеровых угловых элементов орбиты следующим образом:

$$\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} \simeq \frac{(n_0 + \dot{M}_0 + \dot{\omega})}{(\omega_E - \dot{\Omega})}, \quad (4)$$

где \dot{M}_0 — угловая скорость изменения средней аномалии на эпоху, $\dot{\omega}$ — угловая скорость изменения аргумента перигея (угловая скорость прецессии линии апсид), $\dot{\Omega}$ — угловая скорость изменения долготы восходящего/нисходящего узла (угловая скорость прецессии линии узлов) [2].

Числитель выражения (4) связан с узловым периодом КА, определяемым как

$T_n = 2\pi / (n_0 + \dot{M}_0 + \dot{\omega})$. Знаменатель формулы (4) имеет отношение к периоду изменения геодезической долготы любого из узлов орбиты, который вычисляется с помощью $T_{\lambda_\Omega} = 2\pi / (\omega_E - \dot{\Omega})$ и выражается в узловых сутках.

При наличии вековых возмущений угловых элементов орбиты период изменения геодезической долготы восходящего (или нисходящего) узла отличается от периода вращения Земли на величину угловой прецессии линии узлов. Поэтому временной интервал полного цикла (или подцикла) может не соответствовать целому числу солнечных суток. Тем не менее условие целого числа обращений за цикл (или подцикл) $\beta = \beta_0$ должно выполняться строго. В этом случае длительность полного цикла (или подцикла) в солнечных сутках определяется произведением целого числа обращений на драконический (узловой) период КА как $\alpha_{real} = \beta_0 \cdot T_n$.

Согласно значениям вековых возмущений первого порядка имеем:

$$n_0 = \sqrt{\frac{GM_E}{a^3}}, \quad (5a)$$

$$\dot{M}_0 = \frac{3}{4} J_2 n_0 \left(\frac{R_E}{a} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 i - 1)}{(1 - e^2)^{3/2}} + O(J_2^2), \quad (5b)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} J_2 n_0 \left(\frac{R_E}{a} \right)^2 \frac{(5 \cos^2 i - 1)}{(1 - e^2)^2} + O(J_2^2), \quad (5c)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 n_0 \left(\frac{R_E}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} + O(J_2^2), \quad (5d)$$

где GM_E — геоцентрическая гравитационная постоянная; R_E — средний экваториальный радиус Земли; $a = R_E + h$ — большая полуось орбиты КА; h, i, e — высота, наклонение и эксцентриситет орбиты КА; J_2 — вторая зональная гармоника ГПЗ.

В вычислениях использовались также слагаемые разложения до (J_2^2) и (J_4) включительно ([7–10]), т.к. они одного и того же порядка малости и позволяют более точно определять оптимальные орбитальные параметры.

Для наглядности на рис. 1 и 2 представлены величины вкладов слагаемых в формулах (5) в зависимости от наклонения. Из рис. 1 и 2 можно увидеть, что вековые возмущения 1-го порядка по J_2 на несколько порядков больше по величине, чем вековые возмущения 2-го порядка по J_2^2 и J_4 . В рассматриваемой теории они были учтены, т.к. оказывают ощутимое влияние на точность получаемого результата (чем больше слагаемых разложения по вековым возмущениям угловых кеплеровых элементов, тем точнее получается результат оптимизации). Стоит отметить, что прецессия линии узлов $\dot{\Omega}$ всегда противоположна направлению обращения КА (вид с северного полюса). Точки пересечения

красной и синей кривой на рис. 1 характеризуют равенство периодов нодальной и апсидальной прецессии орбиты, соотношение между которыми детально рассмотрено в работе [11].

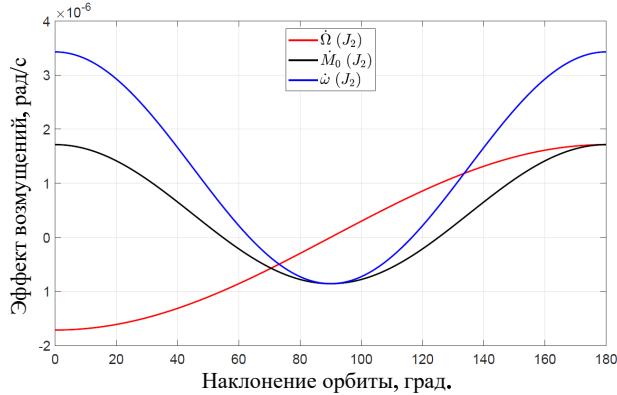


Рис. 1. График зависимости эффекта вековых возмущений 1-го порядка по J_2 от наклонения орбиты для высоты орбиты над поверхностью Земли $h = 550$ км (пример)

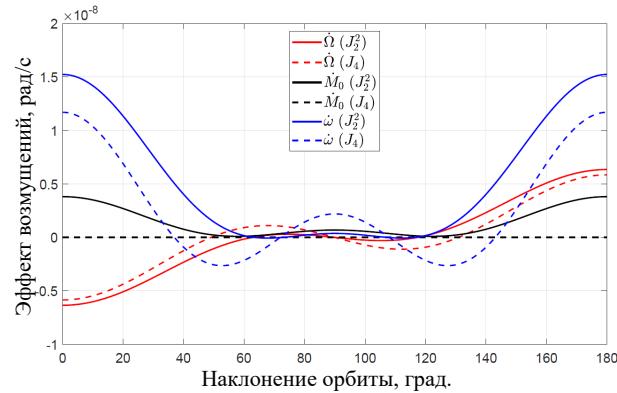


Рис. 2. График зависимости эффекта вековых возмущений 2-го порядка по J_2 от наклонения орбиты для высоты орбиты над поверхностью Земли $h = 550$ км (пример)

2. АЛГОРИТМ ПОИСКА ЦИКЛОВ И ПОДЦИКЛОВ

Для того, чтобы воспользоваться формулой (4), необходимо определить комбинации β_0 и α_0 , которые обеспечивают самозамыкание подспутниковых трасс на заданном интервале времени в случае невозмущенной кеплеровской орбиты КА. Алгоритм выглядит следующим образом:

1. Необходимо определить диапазон количества обращений в узловые сутки, в частности минимальное и максимальное значения, как целые части $\Gamma_{min} = \text{floor}[\Gamma_0(h_{min})]$

и $\Gamma_{max} = \text{ceil}[\Gamma_0(h_{max})]$ по формулам

$$\Gamma_0 = \frac{86400}{T_{n_0}}, \quad T_{n_0} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_E + h)^3}{GM_E}}.$$

2. С использованием Γ_{min} и Γ_{max} необходимо отсечь комбинации α_0 и β_0 , которые выходят за диапазон $[\Gamma_{min}, \Gamma_{max}]$. Параметр α_0 рассматривается в диапазоне от 1 до $\alpha_{max} = 30$ с шагом в узловые 1 сутки, параметр β_0 варьируется от Γ_{min} до $\Gamma_{max} \times \alpha_{max}$ с шагом в 1 обращение.
 3. Необходимо также, чтобы *наибольший общий делитель* (НОД), который вычисляется с использованием расширенного алгоритма Евклида [12], для α_0 и β_0 был равен 1, т.е. оставляем только взаимно простые целые числа. Алгоритм определяет коэффициенты Бéзу, которые удовлетворяют линейному диофантовому уравнению $\alpha_0 \cdot U + \beta_0 \cdot V = G$, где $G = 1$ — НОД, наибольшее число, на которое делятся α_0 и β_0 без остатка.
 4. Вместе с определением НОД на этапе 3 мы можем определить количество обращений и период подцикла с помощью коэффициентов Бéзу как $\beta_0^s = \text{abs}(V)$ и $\alpha_0^s = \text{abs}(U)$, а также задать дополнительное условие отбора, чтобы период подцикла не был равен 0 (комбинации, у которых нет подцикла).
 5. По результатам работы алгоритма определяется набор комбинаций α_0 и β_0 , ограниченных Γ_{min} и Γ_{max} с НОД = 1 и $\alpha_0^s = \text{abs}(U) \neq 0$. Отобранные комбинации этих параметров в диапазоне $25 \leq \alpha_0 \leq 35$, а также значения подциклов изображены на рис. 3 в виде вертикальных отрезков, где цвет обозначает количество узловых дней подцикла.
 6. С помощью перебора по заданному диапазону наклонений i необходимо определить высоту орбиты спутника h для каждой комбинации α_0 и β_0 . Для этого необходимо минимизировать следующий функционал:
- $$\frac{\beta_0}{\alpha_0} - \frac{(n_0(h) + \dot{M}_0(h, i) + \dot{\omega}(h, i))}{(\omega_E - \dot{\Omega}(h, i))} \rightarrow 0. \quad (6)$$
- Далее к высоте орбиты, полученной аналитическим методом, добавляется слагаемое согласно функциональной зависимости от наклонения $A \cdot \cos^2 i + B$, обусловленное расхождением с численным методом из раздела 3.
7. Последним этапом на основе найденной высоты орбиты необходимо определить драконический (или узловой) период КА и количество дней полного цикла и подцикла, выраженных в солнечных сутках, с помощью выражений $\alpha_{real} = \beta_0 \cdot T_n$ и $\alpha_{real}^s = \beta_0^s \cdot T_n$.
- 2610801-4

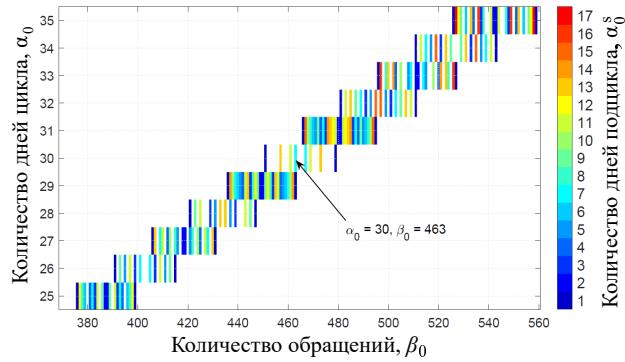


Рис. 3. Отобранные комбинации α_0 и β_0 , обеспечивающие самозамыкание трасс. Цветовая шкала показывает количество узловых дней подцикла α_0^8

3. СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО МЕТОДОВ

С помощью алгоритма поиска циклов и подциклов была найдена комбинация $\beta_0 = 463$, $\alpha_0 = 30$ и $\beta_0^s = 108$, $\alpha_0^s = 7$ (обозначена стрелкой на рис. 3), которая обеспечивает полный цикл на интервале 30 суток и подцикл на интервале 7 суток.

Для того, чтобы определить оптимальные орбитальные параметры, на первой итерации использовалась аналитическая формула (4), а далее с помощью минимизации функционала выполнялось уточнение. Задача минимизации для численного метода решалась с помощью функции fminbnd() на языке программирования MATLAB. В заданных пределах варьируемых высот ± 15 км при фиксированном наклонении с помощью численного интегрирования орбитального движения определялись величины максимального и минимального экваториальных пропусков, которые за полный цикл должны быть минимальны. В оптимальном случае за полный цикл минимальный экваториальный пропуск должен быть как можно близок к 0, а максимальный экваториальный пропуск должен приближаться к фундаментальному субинтервалу S_i , представленному в разд. 1.

Красная кривая с подписью «Аналитика» на рис. 4, а является линией пересечения двух поверхностей, вычисленных по аналитическим формулам (3) и (4) с параметрами $\beta_0 = 463$, $\alpha_0 = 30$ на сетке высот (от 300 до 550 км) и наклонений (от 0° до 180°). Зависимость наклонения от высоты орбиты, полученная на основе численного моделирования, представлена черной кривой с подписью «Численно» на рис. 4, а, а синяя кривая на рис. 4, б показывает разность красной и черной кривых.

Данная разность красной и черной кривых отлична аппроксимируется функцией вида $A \cdot \cos^2 i + B$, коэффициенты которой получаются равными $A = -9.72446646$ и $B = 9.73326014$ при коэффициенте детерминации $R^2 = 0.999973$. Природа данной зависимости может быть объяснена наличием в численном методе периодических слагаемых в возму-

щающей функции, а также вкладами больших порядков по J_2 и J_4 , которые остаточно влияют на кеплеровы элементы орбиты.

После вычитания аппроксимационной кривой из разности аналитического и численного методов получается остаточная разность, изображенная на рис. 5. Данная остаточная разность определяется ограниченным рядом вековых возмущений (до J_4 включительно).

Из рис. 5 можно увидеть, что максимальное отклонение составляет порядка 30 м по высоте орбиты. Аналитический учет вековых возмущений больших порядков в модели позволяет уменьшить данное расхождение и дать более точное решение. Полученный в работе результат оказывается достаточным и является компромиссом между точностью и громоздкостью разложения возмущающей функции до больших степеней малости зональных гармоник.

С учетом разности между кривыми, полученными аналитическим и численным методами, к аналитически рассчитанной высоте орбиты необходимо добавить значение, полученное с помощью зависимости $A \cdot \cos^2 i + B$ с коэффициентами $A = -9.71335917$ и $B = 9.73389716$ для заданного наклонения.

4. ПОЛНОМАСШТАБНОЕ ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

С использованием реализованного алгоритма для заданного набора наклонений были определены высоты орбит при комбинации параметров $\beta_0^s = 463$ обращений за $\alpha_0^s = 30$ узловых суток для полного цикла и $\beta_0 = 108$ обращений за $\alpha_0 = 7$ узловых суток для подцикла. Полученные значения для первых четырех конфигураций, представленные в табл. 1, обеспечивают равномерное покрытие поверхности Земли измерениями. Для всех конфигураций, приведенных в табл. 1, было рассчитано реальное количество дней полного цикла α_{real} и подцикла α_{real}^s в солнечных сутках при условии целого числа обращений $\beta_0 = 463$ и $\beta_0^s = 108$ на интервалах интегрирования продолжительностью 30 и 7 солнечных суток соответственно. Конфигурация № 5 соответствует орбитальным параметрам миссии GRACE. Для неё значения количества дней полного цикла и подцикла при $\beta_0 = 463$ и $\beta_0^s = 108$ обращениях были получены отдельно и превышают длительности интервалов интегрирования в 30 и 7 солнечных суток соответственно. В последнем столбце табл. 1 приведено также значение среднего узлового периода обращения, определяющее время между последовательными пересечениями экватора в течение всего интервала моделирования.

Полномасштабное численное интегрирование орбитального движения на интервале 30 и 7 солнечных суток было выполнено для каждой из конфигураций в табл. 1 с общими параметрами, представленными в табл. 2 с учетом моделей сил, действующих на КА, которые перечислены в табл. 3.

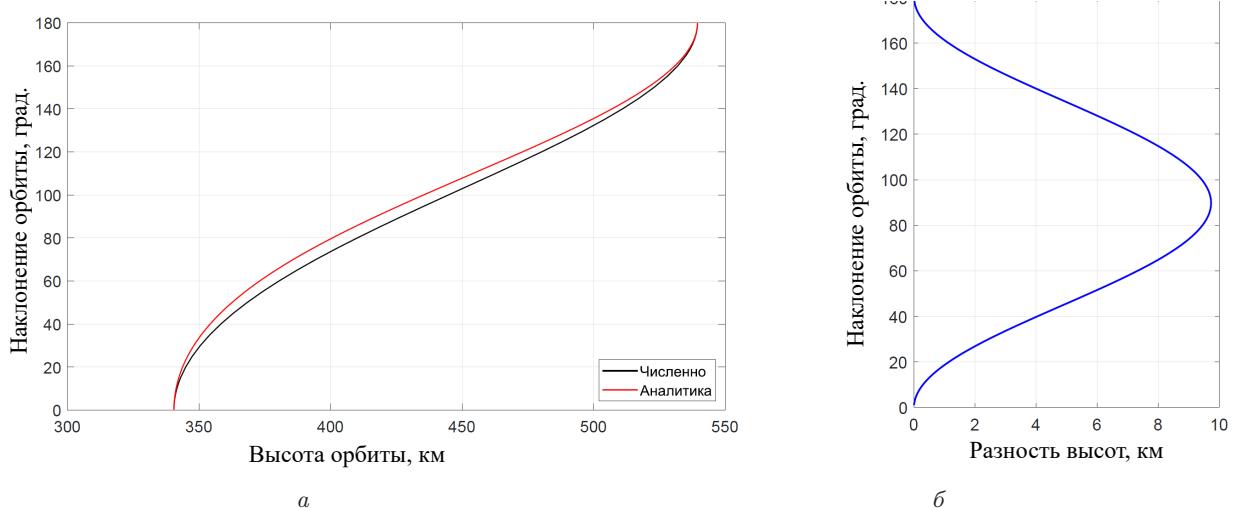


Рис. 4. Графики сравнения аналитического и численного методов (а), а также их разности (б) для комбинации $\beta_0 = 463$ и $\alpha_0 = 30$

Таблица 1. Однопарные конфигурации для восстановления ГПЗ

№	Высота, км	Наклонение, град	α_{real} , кол-во дней цикла	α_{real}^s , кол-во дней подцикла	T_n , средний узловый период, часы
1	425.3683	89.0	29.9064	6.9760	1.5502
2	426.2396	89.5	29.9121	6.9773	1.5505
3	426.7634	89.8	29.9156	6.9781	1.5507
4	427.1129	90.0	29.9179	6.9787	1.5508
5	475.0	89.0	30.2345	7.0525	1.5672

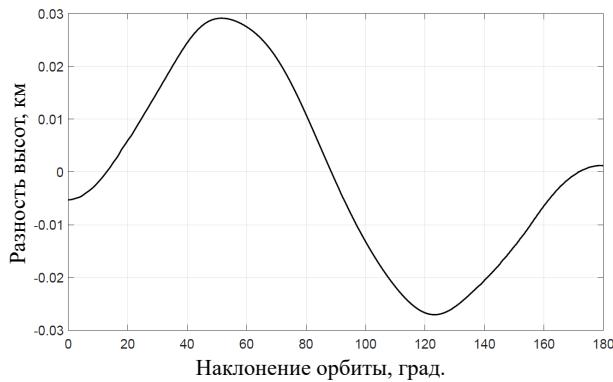


Рис. 5. Остаточная разность высот орбиты между аналитическим и численным методами с учетом аппроксимационной функции

Для каждой из орбит была проведена оценка плотности и равномерности покрытия поверхности Земли подспутниковых трассами КА в долготном и широтном направлениях (табл. 4 и 5), мерой которого является расстояние между соседними подспутниковыми трассами в широтном и долготном направлениях или, иными словами, «максимальный пропуск по широте» и «максимальный пропуск по долготе». Процент глобального покры-

тия определялся по методике, описанной в [4].

На основании анализа плотности и равномерности покрытия в долготном и широтном направлениях можно сделать вывод, что лучшей с точки зрения минимальных значений пропуской по долготе и широте является конфигурация № 4, худшой — № 5. Конфигурация № 4 на интервале 30 суток (табл. 4) обеспечивает 100% глобальное покрытие на пространственном разрешении $0.8^\circ \times 0.8^\circ$ при минимальном максимальном широтном пропуске (максимальный долготный пропуск для № 1–4 практически одинаковый), в то время как конфигурация № 5 показывает худшие результаты по всем параметрам. Процент глобального покрытия определяется как отношение количества сегментов k , в которые попала хотя бы одна точка подспутниковой трассы КА (измерение), к общему числу сегментов K по всей поверхности Земли, т.е. k/K [4]. На интервале 7 суток (табл. 5) по максимальному долготному пропуску конфигурации № 1–4 также имеют практически одинаковый результат, однако № 4 превосходит все по максимальному широтному пропуску, а № 5 показывается худший результат.

Для наглядного сравнения этих двух конфигураций (лучшей и худшей) на рис. 6 и 7 были построены подспутниковые трассы на поверхности Земли для 30 и 7 суток соответственно.

Таблица 2. Общие орбитальные параметры для всех конфигураций

Параметр	Значение
Начальная эпоха	2023-12-01 00:00:00
Интервал интегрирования	7 и 30 дней
Шаг интегрирования	5 с
Межспутниковое расстояние	220 км
Эксцентриситет	0.001
Аргумент перигея первого спутника	0.0°
Аргумент перигея второго спутника	4.5°
Долгота восходящего узла КА в каждой паре	0.0°
Средняя аномалия КА в каждой паре	0.0°

Таблица 3. Список учитываемых параметров моделей сил при полномасштабном моделировании

Название	Модель
Глобальное гравитационное поле Земли	GGM05S [13]
Воздействие от третьих тел (планет Солнечной системы)	DE421 [14]
Океанические приливы	FES 2004 [15]
Влияние океанических приливов на положение полюса	FES 2004 [15]
Твердые приливы	IERS 2010 [16]
Влияние твердых приливов на положение полюса	IERS 2010 [16]
Атмосферное сопротивление	Нет
Давление солнечного излучения	Нет

Таблица 4. Оценка равномерности и плотности покрытия поверхности Земли подспутниковыми трассами однопарными конфигурациями на интервале 30 суток

№	Глоб. покр-е в сегментах, %	Пространственное разрешение	Макс. долготный пропуск	Макс. широтный пропуск
1	100%	1.2° × 1.2°	0.811°	29.620°
2	100%	1° × 1°	0.868°	20.875°
3	100%	1° × 1°	0.804°	19.022°
4	100%	0.8° × 0.8°	0.806°	6.319°
5	100%	1.5° × 1.5°	1.516°	34.852°

Таблица 5. Оценка равномерности и плотности покрытия поверхности Земли подспутниковыми трассами однопарными конфигурациями на интервале 7 суток

№	Глоб. покр-е в сегментах, %	Пространственное разрешение	Макс. долготный пропуск	Макс. широтный пропуск
1	100%	3.6° × 3.6°	3.902°	97.049°
2	100%	3.6° × 3.6°	3.879°	66.082°
3	100%	4° × 4°	3.905°	57.015°
4	100%	4° × 4°	3.905°	47.870°
5	100%	4.5° × 4.5°	4.755°	70.094°

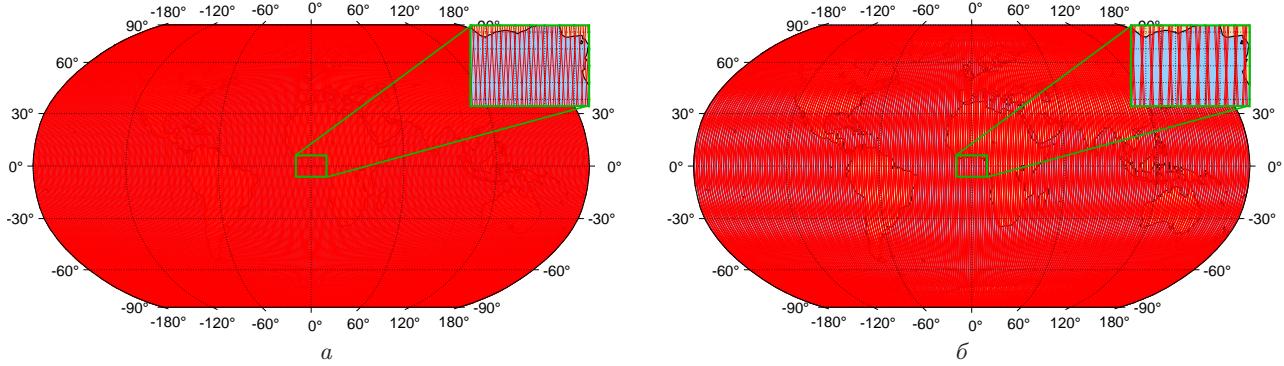


Рис. 6. Покрытие подспутниковыми трассами поверхности Земли спутниками с параметрами $h = 427.1129$ км, $i = 90.0^\circ$ (конфигурация № 4 слева) и $h = 475$ км, $i = 89.0^\circ$ (конфигурация № 5 справа) на временнбом интервале 30 суток

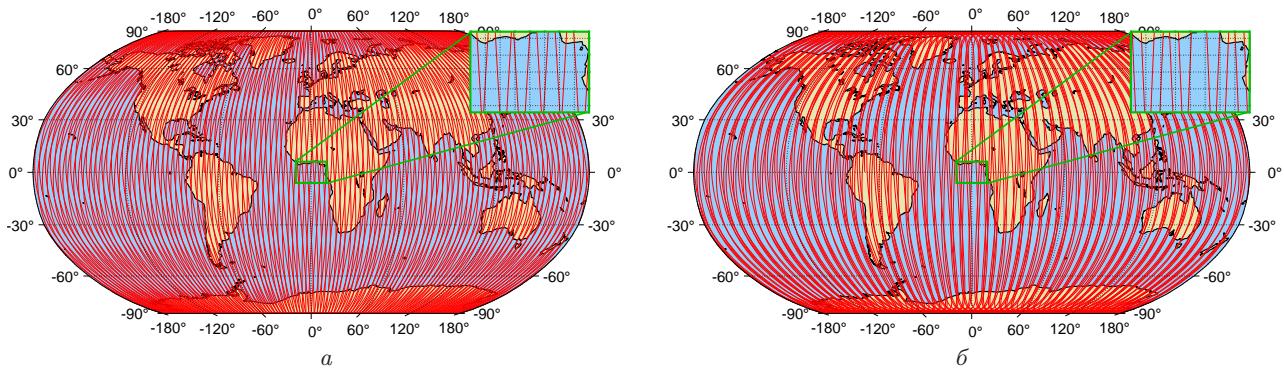


Рис. 7. Покрытие подспутниковыми трассами поверхности Земли спутниками с параметрами $h = 427.1129$ км, $i = 90.0^\circ$ (конфигурация № 4 слева) и $h = 475$ км, $i = 89.0^\circ$ (конфигурация № 5 справа) на временнбом интервале 7 суток

Из рисунков видно, что конфигурация № 4, по сравнению с № 5, обладает лучшей равномерностью и плотностью покрытия поверхности Земли подспутниковыми трассами КА на обоих интервалах 30 и 7 суток.

В следующем разделе для всех 5 однопарных конфигураций выполнены экспериментальные рас-

четы по восстановлению ГПЗ для оценки влияния равномерности и плотности покрытия на качество решения.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГПЗ

Модели ГПЗ задаются разложением по сферическим функциям [17]

$$R = (U - U_0) = \frac{GM_E}{r} \left[\sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{r} \right)^n \bar{P}_{nm} (\sin \varphi) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (7)$$

где r, φ, λ — сферические координаты точки (или КА) в системе координат, жестко связанной с Землей; $U_0 = GM_E/r$ — потенциал Земли в представлении материальной точки; \bar{P}_{nm} ($\sin \varphi$) — нормированные присоединенные функции Лежандра степени n и порядка m ; $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ — нормированные коэффициенты Стокса; N_{max} — максимальная степень разложения.

Для представления результатов восстановления ГПЗ и сравнения различных моделей ГПЗ принято

использовать несколько величин, которые характеризуют оценки коэффициентов сферических гармоник и позволяют выполнять сравнение разных моделей ГПЗ.

Выражение (8) называется дисперсией степенной разности (degree difference variance, DDV). Дисперсия степенной разности имеет размерность высот геоида и используется для представления расхождений или сравнения двух моделей ГПЗ по степеням n

Таблица 6. Кумулятивные разности (10) истинного (REAL) и восстановленных (RES) гравитационных полей (в терминах высот геоида, м) для однопарных конфигураций № 1–5 на 30 сутках

№	Сумм. кум. разность, м	Мин. расх. геоида, м	Макс. расх. геоида, м	Ст. откл. расх. геоида, м
1	17.4068	-7.9633	7.7047	0.9710
2	12.7883	-5.1925	5.3284	0.8282
3	9.4604	-7.5393	7.3223	0.6679
4	7.6903	-6.0978	5.8158	0.6675
5	101.6235	-44.0206	44.6181	4.7556

Таблица 7. Кумулятивные разности (10) истинного (REAL) и восстановленных (RES) гравитационных полей (в терминах высот геоида, м) для однопарных конфигураций № 1–5 на 7 сутках

№	Сумм. кум. разность, м	Мин. расх. геоида, м	Макс. расх. геоида, м	Ст. откл. расх. геоида, м
1	0.0274	-0.0078	0.0085	0.0019
2	0.0286	-0.0065	0.0087	0.0020
3	0.0274	-0.0061	0.0091	0.0020
4	0.0258	-0.0058	0.0095	0.0019
5	0.0302	-0.0094	0.0136	0.0020

$$DDV(n) = R_E \sqrt{\sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm}^2 + \Delta S_{nm}^2)}. \quad (8)$$

В рамках данного исследования ΔC_{nm} и ΔS_{nm} представляют разности коэффициентов истинной (REAL) и восстановленной (RES) моделей ГПЗ:

$$\Delta C_{nm} = (C_{nm})_{real} - (C_{nm})_{res} \quad (9)$$

и $\Delta S_{nm} = (S_{nm})_{real} - (S_{nm})_{res}$.

Суммарной кумулятивной разностью называется выражение

$$\sigma_{cum} = R_E \sqrt{\sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm}^2 + \Delta S_{nm}^2)}. \quad (10)$$

Величина, получаемая в уравнении (10), является числом, которое представляет суммарную разность всех коэффициентов разложения двух моделей ГПЗ и позволяет проводить сравнение различных моделей восстановленного поля между собой.

Наконец, выражение (11) называется разностью высот геоида, которое выражено также в высотах геоида и используется для представления расхождений между двумя различными моделями ГПЗ на поверхности Земли

$$\Delta H(\varphi, \lambda) = R_E \left[\sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n P_{nm} (\sin \varphi) \times \right. \\ \left. \times (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) \right]. \quad (11)$$

В качестве истинной (REAL) модели ГПЗ использовалась EGM2008, соответственно дисперсия степенной разности и расхождение высот геоида показывают, насколько восстановленная модель приближается к принятой в рамках эксперимента истинной модели (REAL).

Для всех однопарных конфигураций из раздела 3 с полным циклом 30 суток и подциклом 7 суток было выполнено восстановление ГПЗ с $N_{max} = 180$ и 50 соответственно. Результаты представлены в табл. 6 и 7, где наилучшей по суммарной кумулятивной ошибке как для 30, так и 7 суток, является конфигурация № 4, а худшей — № 5.

Рис. 8 и 9 демонстрируют расхождения высот геоида моделей восстановленного гравитационного поля (RES) и истинного поля EGM2008 для двух отобранных конфигураций (лучшей и худшей) на интервалах 30 и 7 суток соответственно.

На интервале 30 суток расхождения высот геоида имеют сильные отличия для конфигураций № 4 и № 5, достигая максимальных отклонений ± 6 м для № 4 и ± 45 м для № 5 (табл. 6).

На рис. 10 для конфигурации № 5 (синяя кривая) можно увидеть увеличение расхождения в диапазонах степеней $n = (50 - 65, 105 - 125, 160 - 180)$ по сравнению с остальными конфигурациями. Это обусловлено плохим измерением секториальных гармоник, о чем свидетельствуют характерные вертикальные полосы на рис. 8 (правая панель). Самые большие расхождения достигаются для секториальных гармоник в диапазоне степеней от 160 до 180, что приводит к большим отклонениям в высотах геоида в близэкваториальной области. Результаты на интервале 30 суток в значительно меньшей степени отличаются для конфигураций № 1–4, т.к. они

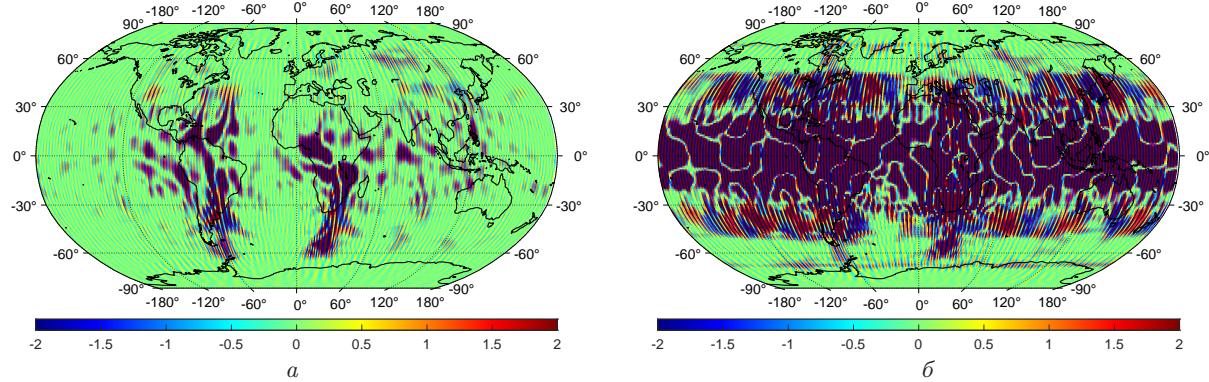


Рис. 8. Расхождение высот геоида (м) восстановленных моделей ГПЗ и истинного гравитационного поля EGM2008 для спутников с параметрами $h = 427.1129$ км, $i = 90.0^\circ$ (конфигурация № 4 слева) и $h = 475$ км, $i = 89.0^\circ$ (конфигурация № 5 справа) на временному интервале 30 суток

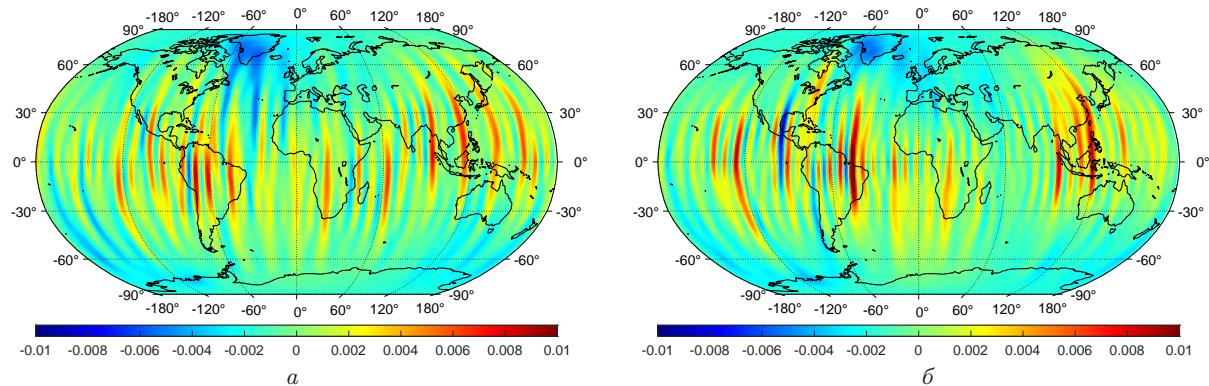


Рис. 9. Расхождение высот геоида (м) восстановленных моделей ГПЗ и истинного гравитационного поля EGM2008 для спутников с параметрами $h = 427.1129$ км, $i = 90.0^\circ$ (конфигурация № 4 слева) и $h = 475$ км, $i = 89.0^\circ$ (конфигурация № 5 справа) на временному интервале 7 суток

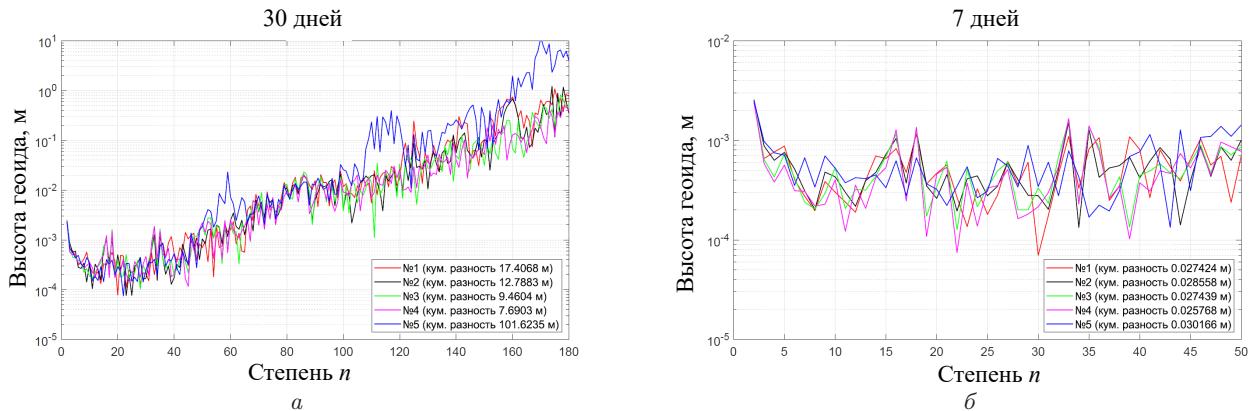


Рис. 10. Дисперсия степенных разностей истинного поля (REAL) и восстановленных моделей ГПЗ (RES) для однопарных конфигураций № 1–5: *a* — на интервале 30 суток, *b* — на интервале 7 суток

были подобраны исходя из оптимального покрытия поверхности Земли подспутниковыми трассами, в отличие от конфигурации № 5, для которой данное условие не выполняется. Стоит также отметить зависимость от наклонения орбиты на интервале 30 суток, для конфигураций № 1–4 выполняется условие равномерности и результаты восстановления получаются лучшими для наклонения 90° .

На интервале 7 суток (рис. 9) расхождение высот геоида не имеют сильных отличий для конфигураций № 4 и № 5, достигая максимальных отклонений ± 1 см для № 4 и ± 1.4 для № 5 (табл. 7).

На рис. 10, *a*, *b* отличия моделей восстановленного ГПЗ от истинного гравитационного поля (EGM2008) представлены в виде дисперсий степенных разностей. На рис. 10, *a* эти разности построены на временному интервале 30 суток, а на

рис. 10, б — на интервале 7 суток.

На 7-суточном интервале для конфигурации № 5 (синяя кривая) наблюдается незначительное увеличение расхождения в диапазонах степеней $n = (7 - 13, 46 - 50)$ по сравнению с остальными конфигурациями.

Это может быть обусловлено худшим измерением секториальных гармоник в указанных диапазонах, о чем также свидетельствуют более выраженные вертикальные полосы на рис. 9 (правая панель). На интервале 7 суток для всех конфигураций восстановление до степени и порядка 50 показывает практически идентичный результат. Это связано с тем, что при достаточно редком покрытии подспутниково-выми трассами результаты восстановления практически не зависят от вариации орбитальных параметров. Этот факт также демонстрирует рис. 10, б.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эффективность восстановления ГПЗ по спутниковым данным напрямую зависит от конфигурации орбиты группировки космических аппаратов, в частности от её высоты и наклонения. Представленный в статье алгоритм позволяет определять с достаточно высокой точностью орбитальные параметры (высоту и наклонение орбиты) для однопарной конфигурации, обеспечивающие равномерное покрытие поверхности Земли подспутниково-ыми трассами.

При добавлении вековых возмущений больших порядков аналитическое решение будет приближаться к численному, тем самым увеличивая точность определения оптимальных орбитальных параметров.

Главным преимуществом данного метода является возможность точечно определять оптимальные орбитальные параметры из бесконечного набора возможных комбинаций, в отличие от прямого пе-

ребора по сетке высот и наклонений с фиксированным шагом. Метод позволяет устанавливать интервал полного цикла и находить для него интервалы возможных подциклов, которые позволяют эффективно восстанавливать ГПЗ с точностью, необходимой для решения различных геодезических задач. Разработанный метод будет особенно эффективен при планировании будущих мультипарных конфигураций, в которых оптимизацию параметров необходимо проводить одновременно для двух и более орбит.

Для рассматриваемых конфигураций было выполнено полномасштабное интегрирование орбитального движения с дальнейшим восстановлением ГПЗ по результатам модельных наблюдений (без добавления ошибок измерений).

Результаты исследования показали наличие положительной корреляции между качеством восстановления ГПЗ и равномерностью покрытия поверхности Земли подспутниково-ими трассами КА. По характеру покрытия поверхности Земли все рассмотренные конфигурации относятся к типу «пересекающихся» орбит, которые обладают рядом преимуществ. В частности, они позволяют строить качественные решения ГПЗ на более коротком интервале подцикла (7 суток), одновременно обеспечивая воспроизводимость полного цикла продолжительностью 30 суток.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук Вадиму Константиновичу Милюкову за постановку задачи, ценные советы и обсуждение полученных результатов, а также доктору физ.-мат. наук, проф. Борису Петровичу Кондратьеву за помочь в корректной записи уравнений возмущённого движения (5c) и (5d).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 23-42-00055.

-
- [1] Tapley B.D., Bettadpur S., Watkins M.M. et al. // *Geophys. Res. Lett.* **31**, 9, L09607 (2004).
 - [2] Iran-Pour S., Reubelt T., Sneeuw N. // *Adv. Space Res.* **52**, 5, 916 (2013).
 - [3] Iran-Pour S., Weigelt M., Amiri-Simkooei A. et al. // *Geosci. J.* **8**, N 9, 315 (2018).
 - [4] Милюков В.К., Фильткин А.И., Жамков А.С. // *Астрон. журн.* **98**, № 4. 342. (2021). (Milyukov V.K., Filetkin A.I., Zhamkov A.S. // *Astron. Rep.* **65**, 331. (2021).)
 - [5] Stewart R.H. *Methods of satellite oceanography*, University of California Press, 1985.
 - [6] Montenbruck O., Gill E. *Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications*, Springer, 2000.
 - [7] Субботин М.Ф. *Введение в теоретическую астрономию*, Наука, 1968.
 - [8] Дубошин Г.Н. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*, Наука, 1976.
 - [9] Аксенов Е.П. *Теория движения искусственных спутников Земли*, Наука, 1976.
 - [10] Емельянов Н.В. // *Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений*, ДМК-Пресс, 2022.
 - [11] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. *Астрон. журн.* **98**, № 5. 407. (2021).
 - [12] Knuth D.E. // *The Art of Computer Programming*, Volume 2, ISBN 0-201-89684-2, Addison-Wesley, 1973.
 - [13] Ince E.S., Barthelmes F., Reißland S. et al. // *Earth System Science Data*, **11**, 647 (2019).
 - [14] Folkner W., Williams J., Boggs D. IPN Progress Report, **42-178**, 1 (2009)
 - [15] Lyard F., Lefevre F., Letellier T. et al. // *Ocean Dynamics* **56**, 394 (2006)
 - [16] Luzum B., Petit G. // *Proceedings of the International Astronomical Union* **10** (H16), 227 (2012)
 - [17] Жамков А.С., Милюков В.К. // *Физика Земли* № 2. 139 (2021) (Zhamkov A.S., Milyukov V.K. // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth* **57**. № 2. 266 (2021).)

Optimization of Orbital Parameters of Spacecraft in the Task of Measuring the Gravitational Field of the Earth

A. I. Filetkin

*Sternberg State Institute of Astronomy, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119191, Russia
E-mail: ai.filetkin@physics.msu.ru*

An analytical method has been developed for optimizing the orbital parameters of a space constellation for measuring the Earth's gravitational field (EGF). The method is based on identifying the repeatability cycles of sub-satellite tracks under unperturbed Keplerian motion, subject to the condition that an integer number of satellite revolutions occurs over an integer number of nodal days. By comparing analytical and numerical approaches, a functional relationship was derived that allows determining the spacecraft orbital altitude for perturbed motion with an accuracy of up to 30 meters. The paper considers two time scales for orbit integration: a full coverage cycle (30 days) and a subcycle (7 days). For the obtained optimal configurations, full-scale integration of the orbital motion and subsequent recovery of the Earth's gravitational field (EGF) were performed, enabling an assessment of the influence of orbital parameters on the accuracy of the recovered field.

PACS: 91.10.Sp

Keywords: space constellation, optimization of orbital parameters, EGF recovery.

Received 20 June 2025.

English version: [Moscow University Physics Bulletin. 2026. 81, No. . Pp. .](#)

Сведения об авторах

Филеткин Александр Иванович — вед. электроник; тел.: (495) 939-53-27,
e-mail: ai.filetkin@physics.msu.ru.