

Континуальный интеграл для заряженной квантовой частицы в магнитном поле

К.А. Лурсманашвили,^{1,*} В.В. Чистяков^{1,†}

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 23.03.2026; после доработки 09.04.2026; подписана в печать 11.04.2026)

Рассматривается квантовомеханическая задача о движении частицы в магнитном поле. Исследуются свойства меры Винера при преобразованиях переменной функционального интегрирования специального вида. Показана эквивалентность функциональных интегралов для частицы в однородном магнитном поле и для свободной частицы.

PACS: 31.15.xk. УДК: 530.11.

Ключевые слова: континуальный интеграл, мера Винера, группа диффеоморфизмов.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.81.2630103](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.81.2630103)

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим частицу единичной массы с зарядом q , совершающую движение в плоскости $x = (x_1, x_2)$. Пусть имеется однородное магнитное поле напряжённости¹ B , перпендикулярное плоскости движения. В этом случае векторный потенциал магнитного поля $\mathcal{A}$ также лежит в плоскости движения частицы и может быть задан двухкомпонентной строкой $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$. Запишем векторный потенциал в виде

$$\mathcal{A} = \left(-\frac{1}{2}Bx_2, \frac{1}{2}Bx_1 \right). \quad (1)$$

Лагранжиан частицы имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{x}) + \frac{q}{c}(\dot{x}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{x}) + \frac{\omega_B}{2}(\dot{x}, xJ), \quad (2)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_B = \frac{qB}{c}. \quad (3)$$

При решении квантовомеханических задач важную роль играет фундаментальное решение уравнения Шрёдингера $K(t, x, x')$

$$i\hbar \frac{\partial K}{\partial t} = \mathcal{H}K, \quad K(0, x, x') = \delta(x - x'), \quad (4)$$

где $\mathcal{H}$ действует на переменную x . Собственные функции и спектр этого оператора однозначно связаны с фундаментальным решением $K(t, x, x')$ [1].

Оператор $\mathcal{H}$, соответствующий лагранжиану (2) имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{(-i\hbar)^2}{2}(\partial_1^2 + \partial_2^2) - \frac{\omega_B}{2}(-i\hbar)(x_1\partial_2 - x_2\partial_1) + \frac{\omega_B^2}{8}(x_1^2 + x_2^2). \quad (5)$$

Как известно [1], фундаментальное решение представимо в виде функционального интеграла

$$K(T, X, X') = \int \delta(x(T) - X) \delta(x(0) - X') \times \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left[\frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{x}) + \frac{\omega_B}{2}(\dot{x}, xJ) \right] \right) dx. \quad (6)$$

Интеграл вида (6) не является интегралом по какой-либо счётно-аддитивной мере [2]. Для корректного определения интеграла (6) необходимо совершить аналитическое продолжение. Положим

$$\hbar = -i\sigma^2. \quad (7)$$

При этом (4), (6) запишутся в виде

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \left[\frac{\sigma^2}{2}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + \frac{\omega_B}{2}(x_1\partial_2 - x_2\partial_1) + \frac{\omega_B^2}{8\sigma^2}(x_1^2 + x_2^2) \right] K, \quad (8)$$

$$K(T, X, X') = \int \delta(x(T) - X) \delta(x(0) - X') \times \exp \left(-\frac{1}{\sigma^2} \int_0^T dt \left[\frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{x}) + \frac{\omega_B}{2}(\dot{x}, xJ) \right] \right) dx. \quad (9)$$

Интеграл (9) при вещественных σ является интегралом по корректно определённой счётно-аддитивной

* E-mail: klavo4ka2001@gmail.com

† E-mail: vsevolod.chistyakov@gmail.com

¹ Здесь B — модуль вектора напряжённости магнитного поля

мере. Интеграл вида (6) определим² как аналитическое продолжение (9) по параметру σ с положительной вещественной оси в точку $\sigma = \sqrt{i\hbar}$.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрим меру Винера на $C([0, T], \mathbb{R}^n)$

$$w_\sigma(dy) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T dt (\dot{y}, \dot{y})\right) dy. \quad (10)$$

Хорошо известно свойство квазиинвариантности меры Винера относительно группы диффеоморфизмов [4], [5]. Покажем, что мера (10) квазиинвариантна относительно более широкого класса преобразований.

Пусть $g \in Diff_+^3([0, T])$, $L \in C([0, T], SO(n, \mathbb{R}))$. Совершим преобразование переменных от $y \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ к $x \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ по следующему правилу

$$y(\tau) = \frac{x(g^{-1}(\tau))}{\sqrt{\dot{g}^{-1}(\tau)}} L(g^{-1}(\tau)). \quad (11)$$

Заметим, что последовательное применение преоб-

разований вида (11), задаваемых парами (g_1, L_1) , $(g_2, L_2) \in Diff_+^3([0, T]) \times C([0, T], SO(n, \mathbb{R}))$, эквивалентно одному преобразованию, задаваемому парой $(g_1 \circ g_2, L_2 \cdot (L_1 \circ g_2))$, где « $\circ$ » — композиция функций, « $\cdot$ » — матричное умножение. Таким образом, естественно определить на $Diff_+^3([0, T]) \times C([0, T], SO(n, \mathbb{R}))$ операцию умножения по правилу

$$(g_1, L_1) \times (g_2, L_2) = (g_1 \circ g_2, L_2 \cdot (L_1 \circ g_2)) \quad (12)$$

Для производной (понимаемой в обобщённом смысле) получим:

$$\dot{y} = \left[\dot{x}(g^{-1}(\tau)) - \frac{1}{2} \frac{\ddot{g}^{-1}(\tau)}{(\dot{g}^{-1}(\tau))^2} x(g^{-1}(\tau)) + x(g^{-1}(\tau)) A(g^{-1}(\tau)) \right] L(g^{-1}(\tau)) \sqrt{\dot{g}^{-1}(\tau)}, \quad (13)$$

где

$$A(t) \equiv \dot{L}(t) L^{-1}(t), \quad A \in C([0, T], so(n, \mathbb{R})). \quad (14)$$

Заметим, что $A^T = -A$.

Для интеграла в показателе экспоненты (10) имеем

$$\int_0^T d\tau (\dot{y}(\tau), \dot{y}(\tau)) = \int_0^T dt \left[(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) + \frac{\ddot{g}(t)}{\dot{g}(t)} (\dot{x}(t), x(t)) + \frac{1}{4} \left(\frac{\ddot{g}(t)}{\dot{g}(t)} \right)^2 (x, x) + 2(\dot{x}(t), x(t) A(t)) - (x(t), x(t) A^2(t)) \right], \quad (15)$$

где $t = g^{-1}(\tau)$.

Преобразуем второе слагаемое по формуле Ито:

$$\int dt \frac{\ddot{g}(t)}{\dot{g}(t)} (\dot{x}, x) = - \int_0^T dt \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{g}(t)}{\dot{g}(t)} \right) (x, x) + \delta_{x,g}^{bound.} + \delta_g^{Ito}, \quad (16)$$

где

$$\delta_{x,g}^{bound.} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\ddot{g}(T)}{\dot{g}(T)} (x(T), x(T)) - \frac{\ddot{g}(0)}{\dot{g}(0)} (x(0), x(0)) \right], \quad (17)$$

$$\delta_g^{Ito} = -\frac{n\sigma^2}{2} [\ln \dot{g}(T) - \ln \dot{g}(0)]. \quad (18)$$

Получим окончательно (аргументы у функций явно не выписываем для краткости)

$$\int_0^T d\tau (\dot{y}, \dot{y}) = \int_0^T dt \left[(\dot{x}, \dot{x}) + 2(\dot{x}, xA) - \frac{1}{2} Sch\{g, t\} (x, x) - (x, xA^2) \right] + \delta_{x,g}^{bound.} + \delta_g^{Ito}. \quad (19)$$

Здесь³

$$Sch\{g, t\} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{g}(t)}{\dot{g}(t)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{g}(t)}{\dot{g}(t)} \right)^2 - \text{производная Шварца}. \quad (20)$$

² Возможно совершить аналитическое продолжение и иным способом, совершив виковский поворот времени $t = -it_E$, а также заменив частоту $\omega_B = -i\tilde{\omega}_B$. Оба способа приво-

дят к одинаковому ответу.

³ Функциональные интегралы в теориях с действием, содержащим производную Шварца подробно рассмотрены в [6, 7].

С учётом якобиана преобразования (11), вычисленного по аналогии с [3], получим следующее равенство мер:

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T d\tau (\dot{y}, \dot{y})\right) dy = [\dot{g}(0)\dot{g}(T)]^{n/4} \exp\left(-\frac{\delta_{x,g}^{bound.}}{2\sigma^2}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T \left[(\dot{x}, \dot{x}) + 2(\dot{x}, xA) - \frac{1}{2}Sch\{g, t\}(x, x) - (x, xA^2)\right] dx\right). \quad (21)$$

Таким образом, мы показали, что мера Винера квазиинвариантна относительно преобразования (11).

Справедливо и более общее утверждение. Пусть $\Gamma(\tau)$, $\Omega(\tau)$ — матричнозначные функции размера $n \times n$, причём $\Gamma^T = -\Gamma$, $\Omega^T = \Omega$. Рассмотрим семейство мер

$$\mu^{\Gamma, \Omega}(dy) \equiv \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \times \int_0^T d\tau [(\dot{y}, \dot{y}) + 2(\dot{y}, y\Gamma) + (y, y\Omega)]\right) dx. \quad (22)$$

При преобразовании вида (11) мера (22) сводится к мере того же вида

$$\mu^{\Gamma, \Omega}(dy) = [\dot{g}(0)\dot{g}(T)]^{n/4} \exp\left(-\frac{\delta_{x,g}^{bound.}}{2\sigma^2}\right) \mu^{\Gamma', \Omega'}(dx), \quad (23)$$

где

$$\Gamma'(t) = \dot{g}(t)L(t)\Gamma(g(t))L^{-1}(t) + A(t), \quad (24)$$

$$\Omega'(t) = (\dot{g}(t))^2 L(t)\Omega(g(t))L^{-1}(t) - \frac{1}{2}Sch\{g, t\}I - \\ - A^2(t) - 2\dot{g}(t)L(t)\Gamma(t)L^{-1}(t)A(t). \quad (25)$$

Формулы (24), (25) определяют действие $Diff_+^3([0, T]) \times C([0, T], SO(n, \mathbb{R}))$ на парах вида (Γ, Ω) . Нетрудно показать, что последовательное применение преобразований, задаваемых элементами (g_1, L_1) и (g_2, L_2) , эквивалентно применению преобразования, задаваемого $(g_1, L_1) \times (g_2, L_2)$, которое определено формулой (12).

2. МЕРА КONTИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Пусть $y, x \in C([0, T], \mathbb{R}^2)$, представим g, L в виде

$$L(t) = \begin{pmatrix} \cos \psi(t) & \sin \psi(t) \\ -\sin \psi(t) & \cos \psi(t) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$g(t) = T \frac{\int_0^t dt_1 e^{\varphi(t_1)}}{\int_0^T dt_1 e^{\varphi(t_1)}}, \quad Sch\{g, t\} = \ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2. \quad (27)$$

В этом случае (21) запишется как

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T (\dot{y}, \dot{y})\right) dy = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T dt \left[(\dot{x}, \dot{x}) + 2\dot{\psi}(\dot{x}, xJ) + (\dot{\psi}^2 - \frac{1}{2}\ddot{\varphi} + \frac{1}{4}\dot{\varphi}^2)(x, x)\right]\right). \quad (28)$$

Положим здесь

$$\psi = \frac{\omega_B}{2}t. \quad (29)$$

Из условия равенства нулю члена при (x, x) получим уравнение

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}(\omega_B^2 + \dot{\varphi}^2). \quad (30)$$

Его частное решение имеет вид

$$\varphi(t) = -2 \ln \left(\cos \frac{\omega_B t}{2} \right). \quad (31)$$

При подстановке решения (31) в формулу (27) получим

$$g(t) = T \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\omega_B t}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\omega_B T}{2} \right)}. \quad (32)$$

Таким образом, при $g(t)$, $L(t)$, задаваемых формулами (32), (29), (26), справедливо равенство мер

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T dt (\dot{y}, \dot{y})\right) dy = \sqrt{\dot{g}(0)\dot{g}(T)} \exp\left(-\frac{\delta_{g,x}^{bound.}}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T dt [(\dot{x}, \dot{x}) + \omega_B(\dot{x}, xJ)]\right) dx. \quad (33)$$

Таким образом, мера континуального интеграла для заряженной частицы в магнитном поле сводится с помощью преобразования (11) к мере Винера.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Запишем преобразование, обратное к (11):

Покажем, как с помощью формулы (33) получить известное в литературе выражение для фундаментального решения уравнения Шрёдингера частицы в магнитном поле [1]. Требуется вычислить функциональный интеграл (9). Выразим аргументы δ -функций через винеровскую переменную $y(\tau)$.

$$x(t) = \frac{y(g(t))}{\sqrt{\dot{g}(t)}} L^{-1}(t). \quad (34)$$

Откуда получим

$$\delta(x(0) - X') = \delta\left(\frac{y(0)}{\sqrt{\dot{g}(0)}} L^{-1}(0) - X'\right) = \dot{g}(0) \delta\left(y(0) - \sqrt{\dot{g}(0)} X' L(0)\right), \quad (35)$$

$$\delta(x(T) - X) = \delta\left(\frac{y(T)}{\sqrt{\dot{g}(T)}} L^{-1}(T) - X\right) = \dot{g}(T) \delta\left(y(T) - \sqrt{\dot{g}(T)} X L(T)\right). \quad (36)$$

Пользуясь (33), получим для $K(T, X, X')$, записанного в виде (9) выражение⁴

$$K(T, X, X') = \sqrt{\dot{g}(0)\dot{g}(T)} \exp\left(\frac{\delta_{x,g}^{bound.}}{2\sigma^2}\right) \times \int \delta\left(y(T) - \sqrt{\dot{g}(T)} X L(T)\right) \delta\left(y(0) - \sqrt{\dot{g}(0)} X' L(0)\right) w_\sigma(dy). \quad (37)$$

Воспользуемся известным значением интеграла [10]:

$$\int \delta(y(T) - Y) \delta(y(0) - Y') w_\sigma(dy) = \mathcal{K}(T, Y, Y') \equiv \frac{1}{2\pi\sigma^2 T} \exp\left(-\frac{(Y - Y')^2}{2\sigma^2 T}\right). \quad (38)$$

Тогда формула (37) запишется в виде

$$K(T, X, X') = \sqrt{\dot{g}(0)\dot{g}(T)} \exp\left(\frac{\delta_{x,g}^{bound.}}{2\sigma^2}\right) \mathcal{K}\left(T, \sqrt{\dot{g}(T)} X L(T), \sqrt{\dot{g}(0)} X' L(0)\right). \quad (39)$$

Подставим сюда явное выражение (32), найдём

$$\sqrt{\dot{g}(0)} = \sqrt{\frac{\omega_B T}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_B T}{2}\right)}}, \quad \sqrt{\dot{g}(T)} = \sqrt{\dot{g}(0)} \frac{1}{\cos \frac{\omega_B T}{2}}, \quad \sqrt{\dot{g}(0)\dot{g}(T)} = \frac{\omega_B T}{2 \sin \frac{\omega_B T}{2}}. \quad (40)$$

Используя значения

$$\frac{\ddot{g}(0)}{\dot{g}(0)} = 0, \quad \frac{\ddot{g}(T)}{\dot{g}(T)} = \omega_B \operatorname{tg} \frac{\omega_B T}{2}, \quad (41)$$

вычислим по формуле (17) $\delta_{x,g}^{bound.}$, здесь и далее мы подставляем $X = (X_1, X_2)$, $X' = (X'_1, X'_2)$

$$\delta_{x,g}^{bound.} = \frac{\omega_B}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_B T}{2}\right) (X_1^2 + X_2^2). \quad (42)$$

Используя выражения (29), (26), получим $L(0) = I$,

$$\sqrt{\dot{g}(T)} X L(T) = \sqrt{\dot{g}(0)} \left(X_1 - X_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_B T}{2}\right), X_2 + X_1 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_B T}{2}\right) \right), \quad (43)$$

$$\mathcal{K}\left(T, \sqrt{\dot{g}(T)} X L(T), \sqrt{\dot{g}(0)} X' L(0)\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 T} \times \quad (44)$$

⁴ Напомним, что символом w_σ мы обозначаем меру Винера (10)

$$\times \exp \left(-\frac{\omega_B}{4\sigma^2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_B T}{2} \left\{ \left(X_1 - X'_1 - X_2 \operatorname{tg} \frac{\omega_B T}{2} \right)^2 + \left(X_2 - X'_2 + X_1 \operatorname{tg} \frac{\omega_B T}{2} \right)^2 \right\} \right).$$

Подставив в (39) найденные выражения (40), (42), (44) и произведя алгебраические преобразования в экспоненте, получим окончательно:

$$K(T, X, X') = \frac{\omega_B}{4\pi\sigma^2 \sin \frac{\omega_B T}{2}} \exp \left(-\frac{\omega_B}{4\sigma^2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_B T}{2} \{ (X_1 - X'_1)^2 + (X_2 - X'_2)^2 \} - \frac{\omega_B}{2\sigma^2} (X_2 X'_1 - X_1 X'_2) \right). \quad (45)$$

Выражение (45) при $\sigma^2 = i\hbar$ совпадает с известным в литературе [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье исследованы свойства функциональных мер при преобразованиях переменной интегрирования вида (11). Получены выражения (21) и (23), определяющие эти свойства. В частном случае траекторий на двумерной плоскости при специальном выборе преобразования переменных, задаваемого формулами (32), (29), (26), получено равенство мер функционального интеграла для частицы в магнитном поле и свободной частицы (33).

Настоящее исследование продолжается в различных направлениях. В частности, будет рассмотрена аналогичная задача на плоскости Лобачевского [8] и изучены функциональные меры при наличии грасмановых переменных, что соответствует учёту спина частицы [9].

Работа выполнялась в рамках госзадания МГУ имени М. В. Ломоносова.

Работа Чистякова В.В. поддержана фондом «Базис».

-
- [1] Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ. Под ред. В.С. Барашенкова. М: Мир, 1968.
 - [2] Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
 - [3] Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. // *Phys. Part. Nucl.* **48**, 2. 267 (2017).
 - [4] Shepp L.A. // *Ann. Math. Statistics.* **37**. 321 (1966).
 - [5] Shavgulidze E.T. // *Russ. J. Math. Phys.* **7** 464 (2000).
 - [6] Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. // *Mod. Phys. Lett. A* **33**. 1850221 (2018). arXiv:1806.05605.
 - [7] Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. // *J. Phys. A: Math. Theor* **53**. 485201 2020. arXiv:1908.10387.
 - [8] Comtet A. // *Ann. Phys.* **173**(1), 185 (1987).
 - [9] Березин Ф.А. Введение в суперанализ. М: МЦНМО, 2013.
 - [10] Ширяев А.Н. Броуновское движение и винеровская мера. М: МЦНМО, Т.1 (2023), Т.2 (2025).

Path Integral for a Charged Quantum Particle in a Magnetic Field

K.A. Lursmanashvili^a, V.V. Chistiakov^b

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

E-mail: ^aklavo4ka2001@gmail.com, ^bvsevolod.chistyakov@gmail.com

The quantum-mechanical problem of the motion of a charged particle in a magnetic field is considered. The properties of the Wiener measure under transformations of the functional integration variable of a specific type are investigated. It is shown that the functional integrals for a particle in a uniform magnetic field are equivalent to those for a free particle.

PACS: 31.15.xk.

Keywords: path integral, Wiener measure, group of diffeomorphisms.

Received 23 March 2026.

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2026. **81**, No. 3. Pp. .

Сведения об авторах

1. Лурсманашвили Клавдия Александровна — студентка 6 курса физического факультета МГУ; e-mail: klavo4ka2001@gmail.com.
2. Чистяков Всеволод Всеволодович — аспирант 1-го года обучения физического факультета МГУ; e-mail: vsevolod.chistyakov@gmail.com.