

О планарных возмущениях в кеплеровских вертикально стратифицированных дисках в однородном магнитном поле

К.Ю. Парусов^{1, *}

¹Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 13

(Поступила в редакцию 12.03.2026; после доработки 09.04.2026; подписана в печать 17.04.2026)

Проведён локальный модальный анализ магниторотационной неустойчивости (МРН) в плоскости симметрии тонкого кеплеровского аккреционного диска с политропной вертикальной стратификацией плотности. Для аналитического решения задачи рассмотрено приближение $\partial/\partial r = 0$ для всех возмущений и планарные адиабатические возмущения в несжимаемой жидкости с $u_z = 0$. Аналитически получено безразмерное дисперсионное соотношение, определены области неустойчивости по волновому числу k_z и выделена неустойчивая ветвь, соответствующая МРН. Показано, как диапазон неустойчивых масштабов и экстремальные значения дисперсионной кривой зависят от величины фонового магнитного поля.

PACS: 95.30.Qd, 97.10.Gz УДК: 524.3, 533.9

Ключевые слова: аккреционные диски, магниторотационная неустойчивость, магнитная гидродинамика, вертикальная стратификация.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.81.2630802](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.81.2630802)

ВВЕДЕНИЕ

Радиальное движение газа в аккреционных дисках, окружающих центральный тяготеющий центр как в двойных системах (в частности, вокруг компактных остатков звездной эволюции — белых карликов, нейтронных звёзд и чёрных дыр), а также в протопланетных дисках и дисках вокруг сверхмассивных чёрных дыр в ядрах галактик, обусловлено обменом вращательного момента между слоями, находящимися на различных расстояниях от гравитирующего центра [1].

Первые попытки расчёта газодинамики аккреции в дифференциально вращающихся дисках были предприняты в 40-х годах XX века и толкнулись на проблему неизвестного на тот момент механизма переноса момента вращения наружу аккреционного диска, так как, в соответствии с гидродинамическим критерием устойчивости Рэлея [2], кеплеровское движение устойчиво по орбите с угловой скоростью $\Omega^2 \sim 1/r^3$ должно быть ламинарным.

Феномен магниторотационной неустойчивости (МРН) был впервые открыт в работах по исследованию устойчивости дифференциального вращательного движения проводящей жидкости в вертикально пронизывающем её магнитном поле Е. П. Велиховым [3] и С. Чандрасекаром [4]. МРН представляет собой привлекательный механизм возбуждения турбулентности, заключающийся в появлении вращательного момента, вызванного сопротивлением квазиупругой силы Лоренца в сдвиговом течении плазмы, под действием которого вращательный момент передаётся от внутренних слоёв жидкостной

структуры к внешним. Впервые анализ МРН в контексте возникновения турбулентности в аккреционных дисках был проведен в важной работе [5].

Стоит отметить, что в реальных аккреционных дисках происхождение и поддержание магнитного поля может быть обусловлено различными механизмами. Во-первых, крупномасштабное магнитное поле может переноситься в диск вместе с аккрецирующим веществом и затем перераспределяться за счёт процессов адвекции и диффузии в диске [6]. Во-вторых, существенную роль может играть собственное динамо диска, связанное с совместным действием дифференциального вращения и турбулентных или конвективных движений [7]. В-третьих, структура магнитного поля во внутренних областях диска может определяться влиянием магнитного поля центрального компактного объекта, особенно вблизи области магнитосферного взаимодействия [8]. Рассматриваемая в настоящей работе неустойчивость анализируется как один из процессов, действующих в уже намагниченной среде.

За последние 30 лет неоднократно проводилось численное моделирование МРН [9–11], подтверждающее её способность создавать турбулентность в аккреционных дисках. Также многократно выполнялись модальные анализы неустойчивости относительно малых возмущений для различных конфигураций задачи [12, 13]. Отметим, что, кроме МРН как затравочного механизма для возникновения турбулентности в замагниченных сдвиговых течениях, возникновение турбулентности в аккреционных дисках может быть вызвано транзитной динамикой возмущений даже при отсутствии магнитного поля [14].

Существуют два подхода к проведению модального анализа МРН: локальный и нелокальный. При

* E-mail: parusovky@my.msu.ru

локальном анализе возмущения записываются в виде гармонических функций от времени и координат, при этом границы течения не влияют на анализ. В нелокальном анализе форма возмущений по времени остаётся гармонической, а зависимость возмущений от координаты ищется как решение соответствующей краевой задачи. Нелокальное рассмотрение МРН по радиусу, проведённое, например, в работе [15], позволило получить значения критического магнитного поля, подавляющего МРН.

Учёт неоднородности по вертикальной структуре (один из первых подобных локальных анализов см. в работе [16]) в общем случае приводит к увеличению порядка краевой задачи до шестого (уравнение шестого порядка ранее получалось в локальном приближении в работе [17]). Для анализа этого случая рассмотрим упрощённую модель малых возмущений в диске и выясним, как наличие вертикальной структуры влияет на дисперсионное соотношение в плоскости симметрии диска.

В настоящей работе проводится локальный анализ аккреционных течений в вертикальном однородном магнитном поле с учётом вертикальной стратификации диска в приближении равенства нулю радиальной производной для всех возмущений. Для аналитического решения задачи рассматриваются адиабатические планарные возмущения в несжимаемой жидкости в конвективно-устойчивом течении.

1. ЛОКАЛЬНЫЙ МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1.1. Основные уравнения

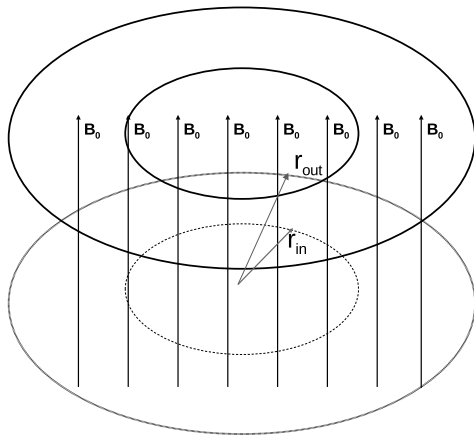


Рис. 1. Схема рассматриваемого течения (дифференциально вращающаяся жидкость между двумя цилиндрами)

Рассмотрим дифференциально вращающуюся идеальную жидкость в однородном вертикальном магнитном поле (см. рис. 1). Уравнения движения идеальной МГД:

1. уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

2. уравнение Эйлера с учётом давления и силы Лоренца

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi_g + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

где ϕ_g — ньютоновский гравитационный потенциал,

3. уравнение индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3)$$

Будем рассматривать адиабатические возмущения с постоянной энтропией

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) s = 0. \quad (4)$$

В этом случае вариации возмущённой плотности равны нулю, $\rho_1 = 0$, и вариации давления в уравнении энергии (и только в нём) исчезают, $p_1 = 0$ (см., например, обсуждение в [18], Appendix).

Тогда уравнение неразрывности (1) для малых возмущений в приближении несжимаемой жидкости, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, в цилиндрических координатах записывается как

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Радиальная, азимутальная и вертикальная компоненты уравнения Эйлера, соответственно, записываются в виде:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - 2\Omega u_\phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - c_A^2 \left[\frac{\partial b_z}{\partial r} - \frac{\partial b_r}{\partial z} \right], \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \frac{\kappa^2}{2\Omega} u_r = c_A^2 \frac{\partial b_\phi}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z}. \quad (8)$$

Здесь введены квадрат эписциклической частоты $\kappa^2 = 4\Omega^2 + r \frac{d\Omega^2}{dr} \equiv \frac{1}{r^3} \frac{d(\Omega^2 r^4)}{dr}$ и невозмущённая альфвеновская скорость $c_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0(z)}$; компоненты возмущения магнитного поля нормированы на величину фонового поля, $\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}_1}{B_0}$.

Три компоненты уравнения индукции с учетом соленоидальности магнитного поля $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ принимают вид:

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial t} = \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + r \frac{d\Omega}{dr} b_r, \quad (10)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = -\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r}. \quad (11)$$

1.2. Случай равенства нулю радиальной производной и вертикальной компоненты возмущений скорости

Рассмотрим эйлеровы возмущения идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах в приближении $\frac{\partial}{\partial r} \equiv 0$ для всех возмущений, а также только планарные возмущения скорости с $u_z \equiv 0$ (это приближение справедливо, так как в этом случае уравнение (5) обращается в тождество). Заметим, что члены вида $\frac{u_r}{r}$ в локальном приближении малы по сравнению с производными, в связи с чем ими можно пренебречь. Ниже будет показано, что в случае однородной плотности система уравнений (5)–(11) сводится к дисперсионному соотношению, полученному ранее в работе [14]. Каждую величину представим в виде суммы её невозмущённой фоновой части и малого возмущения. Невозмущённое движение чисто вращательное: $\mathbf{u}_0 = u_{\phi,0} \mathbf{e}_\phi$, где $u_{\phi,0} = \Omega(r)r$. В этом случае компоненты скорости течения имеют вид: $0 + u_r$, $u_{\phi,0} + u_\phi$, $0 + u_z$, магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, давление $p = p_0 + p_1$. Магнитное поле чисто полоидальное $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Для учета возможной роли вертикальной структуры течения возмущения будем искать в виде $\sim f(z) \exp[i\omega t]$.

В приближении $\partial/\partial r = 0$ и $\frac{u_r}{r} \rightarrow 0$ три компоненты уравнения Эйлера записываются как

$$i\omega u_r - 2\Omega u_\phi = c_A^2 \frac{\partial b_r}{\partial z}, \quad (12)$$

$$i\omega u_\phi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} u_r = c_A^2 \frac{\partial b_\phi}{\partial z}, \quad (13)$$

$$i\omega u_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Три компоненты уравнения индукции принимают вид

$$i\omega b_r = \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad (15)$$

$$i\omega b_\phi = \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + r \frac{d\Omega}{dr} b_r, \quad (16)$$

$$b_z = 0. \quad (17)$$

Итоговая система уравнений для планарных возмущений с $u_z = 0$ сводится к 4 уравнениям на поле возмущённых планарных скоростей u_r , u_ϕ и магнитных полей b_r , b_ϕ :

$$i\omega u_r - 2\Omega u_\phi = c_A^2 \frac{\partial b_r}{\partial z}, \quad (18)$$

$$i\omega u_\phi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} u_r = c_A^2 \frac{\partial b_\phi}{\partial z}, \quad (19)$$

$$i\omega b_r = \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad (20)$$

$$i\omega b_\phi = \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + r \frac{d\Omega}{dr} b_r. \quad (21)$$

Исключая u_ϕ из уравнений (18) и (19), дважды дифференцируя (18) и заменяя поля через скорости из уравнений индукции (20) и (21), получаем одно уравнение 4-го порядка на поле скоростей u_r :

$$\omega^2(\kappa^2 - \omega^2)u_r + \left(r \frac{d\Omega^2}{dr} - 2\omega^2\right) \left[c_A^2 \frac{d^2 u_r}{dz^2}\right] - c_A^2 \frac{d^2}{dz^2} \left[c_A^2 \frac{d^2 u_r}{dz^2}\right] = 0. \quad (22)$$

Отметим, что это уравнение совпадает с уравнением (22) из работы [16] для лагранжевых планарных смещений в неинерциальной локальной декартовой системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω .

Вертикальная структура течения определяется зависимостью альфвеновской скорости от z -координаты.

1.3. Политропное распределение плотности

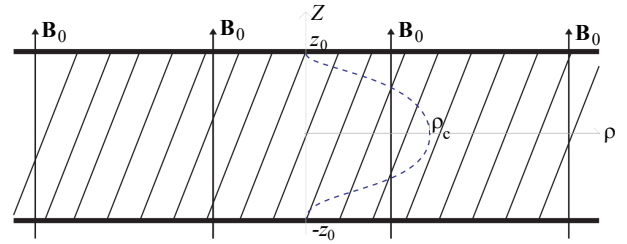


Рис. 2. Политропное вертикальное распределение плотности в рассматриваемом течении.

Рассмотрим случай с вертикальным политропным профилем распределения плотности:

$$\rho_0(z) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^n, \quad (23)$$

где ρ_c — плотность в плоскости симметрии диска, n — показатель политропы, z_0 — полутолщина диска. Это распределение может быть получено путём интегрирования невозмущённого уравнения Эйлера. В дальнейшем мы будем рассматривать только модельный случай с $n = 1.5$, соответствующий постоянной энтропии $s_0 = \text{const}$. Отметим, что в реальных аккреционных дисках фоновая энтропия растёт наружу по z -координате, что соответствует примерному значению $n \approx 2.5$ (см. работу [19]). При появлении вертикального градиента энтропии важным становится учет градиентов давления, требующих учета плавучести в динамических уравнениях, которым мы пренебрегаем для планарных возмущений.

Будем работать в линейном приближении по $x = \frac{z}{z_0}$. Такое приближение оправдывается следующим обстоятельством: так как по определению $0 < x < 1$, а параметр магнитного поля, записанный в виде отношения альфвеновской скорости к характерной скорости $c_S \equiv \Omega z_0$, которая в приближении тонкого диска имеет порядок скорости звука $\left(\frac{c_A}{c_S}\right)^2 = \left(\frac{c_A}{c_S}\right)_0^2 (1 - x^2)^{-n} < 1$, то чем больше фоновое магнитное поле, тем при меньших x имеет смысл рассматривать задачу в локальном приближении. Далее заметим, что в линейном приближении для политропного распределения плотности (23) параметр $\frac{c_A}{c_S}(x) = \frac{c_A}{c_S}(0)$.

1.4. Локальное приближение в плоскости симметрии

Краевая задача с четными и нечетными производными требует наложения соответствующих граничных условий и в общем случае может решаться численно. Поскольку мы рассматриваем ограниченный класс возмущений и интересуемся влиянием структурных коэффициентов на характер МРН, будем искать решение уравнения (22) в виде $\sim \exp[-ik_z z]$.

Тогда дифференциальное уравнение сводится к следующему полиному 4-й степени:

$$\omega^4 - \omega^2(\kappa^2 + 2k_z^2 c_A^2) + k_z^4 c_A^4 - 3\frac{k_z^2 c_A^4}{z_0^2} + k_z^2 c_A^2 2\Omega r \frac{d\Omega}{dr} = 0. \quad (24)$$

Это уравнение задает дисперсионное соотношение с учетом структурного коэффициента c_A^2 .

Обратим внимание, что в случае однородного распределения плотности по z -координате ($\frac{dc_A^2}{dz} \equiv 0$) дисперсионное соотношение сводится к известному результату для МРН, полученному для идеальной жидкости в [18] и в гл. 8 в [14]:

$$\omega_*^4 - \left(\frac{k_z}{k}\right)^2 \kappa^2 \omega_*^2 - 4\Omega^2 \left(\frac{k_z}{k}\right)^2 k_z^2 c_A^2 = 0,$$

где $\omega_*^2 = \omega^2 - c_A^2 k_z^2$, $k^2 = k_r^2 + k_z^2$. В рамках нашего приближения $k_r \equiv 0$ и $k^2 = k_z^2$.

Для дальнейшего анализа удобно привести уравнение (24) к безразмерному виду, разделив его на Ω^4 :

$$\tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2 \left(\tilde{\kappa}^2 + 2\kappa^2 \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^2 \right) + \kappa^4 \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^4 - 3\kappa^2 \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^4 + 2\kappa^2 \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^2 \frac{d \ln \Omega}{d \ln r} = 0, \quad (25)$$

где $\tilde{\omega} \equiv \frac{\omega}{\Omega}$, $\tilde{\kappa} \equiv \frac{\kappa}{\Omega}$, $\kappa \equiv k_z z_0$.

В этом случае решения биквадратного алгебраического уравнения (25) для случая дисков

с $\Omega^2 \sim 1/r^3$ (кеплеровский профиль угловой скорости) и постоянной энтропией $n = 1.5$, $x \ll 1$ имеют вид:

$$\tilde{\omega}^2 = \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^2 \kappa^2 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^2 \kappa^2 \left(4 + 3 \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^2 \right)}. \quad (26)$$

Здесь учтено, что квадрат эпициклической частоты $\kappa^2 = 4 + 2 \frac{d \ln \Omega}{d \ln r} = \Omega^2$ для кеплеровского течения. Для неустойчивой ветви решения (появление экспоненциально растущих возмущений при $\omega^2 < 0$) необходимо брать знак минус перед квадратным корнем. График $\omega^2(\kappa^2)$ для некоторых значений параметра $(c_A/c_S)^2$ приведён на рис. 3. Точка пересечения оси абсцисс определяется через параметр $(c_A/c_S)^2$ следующим образом:

$$\kappa_0^2 = \frac{3 + 3 \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^2}{\left(\frac{c_A}{c_S} \right)^2}. \quad (27)$$

2. КРИТИЧЕСКОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Как известно, в однородном локальном приближении МРН возникает при любом фоновом магнитном поле, с ростом поля область неустойчивости для волновых чисел сужается, а инкремент неустойчивости при $\tilde{\omega}^2|_{min}$ остаётся постоянным (см., например, [14]). Из графика на рис. 3 видно, что локальный учет неоднородности качественно не меняет картину, хотя $\tilde{\omega}^2|_{min}$ несколько возрастает с увеличением фонового поля. Из общих физических соображений ясно, что с увеличением поля МРН должна исчезать. В тонких структурированных дисках появляется критическое магнитное поле, величина которого может быть оценена уже из анализа уравнения (22), как это было сделано для планарных возмущений в изотермическом диске с экспоненциально падающей плотностью в работе [16]. Для этого следует поставить вертикальные граничные условия в таком диске и решить краевую задачу, например методом Штурма–Лиувилля для оператора $c_A^2(z) d^2/dz^2$. Однако постановка граничных условий в модельном случае постоянной поля в среде с бесконечно убывающей плотностью сталкивается с трудностями (см. обсуждение в работе [16]).

Сделаем оценку критического магнитного поля в рассматриваемом случае политропного распределения плотности в диске, исходя из следующих соображений. Распространение альфвеновских волн в МГД-приближении корректно до расстояния z_{cr} , где появляется значительный вклад тока смещения и альфвеновская волна переходит в электромагнитную (подробно о переходе МГД-волны в элек-

ромагнитную см. в работах [20, 21]). Грубо оценим верхнюю границу этого расстояния условием $c_A(z_{cr}) = c$, где c — скорость света в вакууме. Таким образом, z_{cr} — это максимально возможная длина волны возмущения, при которой еще работает МГД-приближение. В нашем случае

$$c_A^2(z_{cr}) = \frac{c_A^2(0)}{(1 - (\frac{z_{cr}}{z_0})^2)^{3/2}} = c^2. \quad (28)$$

Откуда, поскольку МГД-неустойчивые значения волновых чисел удовлетворяют неравенству $\kappa \geq \kappa_{min} = 2\pi \frac{z_0}{z_{cr}}$, получается минимальное значение κ^2 (здесь и далее $c_A(0) \equiv c_A$):

$$\kappa_{min}^2 = \frac{4\pi^2}{1 - (\frac{c_A}{c})^{\frac{4}{3}}}. \quad (29)$$

Неустойчивости будет соответствовать диапазон волновых чисел, удовлетворяющих условию $\tilde{\omega}^2(\kappa^2 \geq \kappa_{min}^2) < 0$. Как следует из уравнения (29), по мере приближения альфвеновской скорости к скорости света, левая граница волновых чисел будет все ближе приближаться к точке пересечения линии абсцисс дисперсионным соотношением (26). Отсюда можно получить критическое значение магнитного поля в плоскости симметрии диска, при достижении которого κ_{min}^2 будет совпадать с κ_0^2 :

$$\frac{3 + 3(\frac{c_A}{c_S})_{cr}^2}{(\frac{c_A}{c_S})_{cr}^2} = \frac{4\pi^2}{1 - (\frac{c_A}{c})^{\frac{4}{3}}}. \quad (30)$$

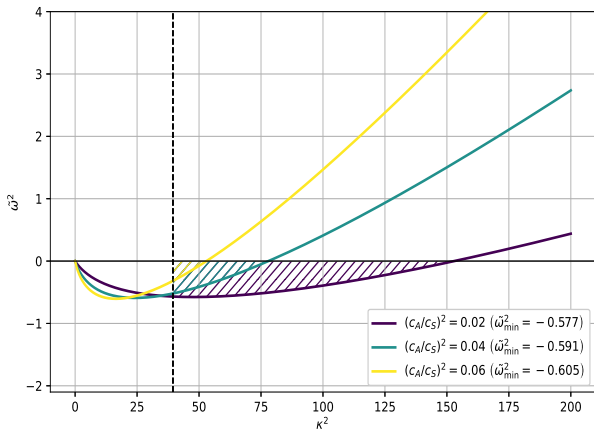


Рис. 3. Дисперсионное соотношение с различными фоновыми полями для случая кеплеровского течения с $n = 1.5$, $(\frac{c_A}{c})^2 \approx 0$, $(\frac{c_A}{c_S})_{cr} \approx 0.08$

Графики дисперсионного соотношения приведены на рис. 3 ($n = 1.5$ — политропное распределение плотности) и рис. 4 ($n = 0$ — бесструктурный случай). Пунктирная линия соответствует значению κ_{min}^2 . Области заштрихованных отрицательных значений $\tilde{\omega}^2$ соответствуют неустойчивым

МГД-модам, а положительные — колебательным. Для случая $\frac{c_A}{c} = 2.9 \times 10^{-3}$ левая граница по κ_{min}^2 смещается примерно на 0.04%. Значение экстремума равно:

$$\tilde{\omega}_{min}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(4 + 3 \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^2 \right) - \frac{1}{4 \left(4 + 3 \left(\frac{c_A}{c_S} \right)^2 \right)}. \quad (31)$$

Отметим, что выражение (31) корректно применять только при $(\frac{c_A}{c_S})^2 \neq 0$. При $c_A = 0$ магниторотационная неустойчивость отсутствует и неустойчивая ветвь дисперсионного соотношения вырождается в нейтральную моду $\tilde{\omega}^2 \equiv 0$. Однако при добавлении сколь угодно малого магнитного поля возникает неустойчивость: по мере исчезновения фонового магнитного поля $(\frac{c_A}{c_S})^2 \rightarrow 0$ точка минимума смещается на бесконечность по волновому числу κ , тогда как само значение минимума стремится к конечному пределу:

$$\lim_{(\frac{c_A}{c_S})^2 \rightarrow 0} \tilde{\omega}_{min}^2(\kappa^2) = -\frac{q^2}{16} \Big|_{q=3} = -0.5625.$$

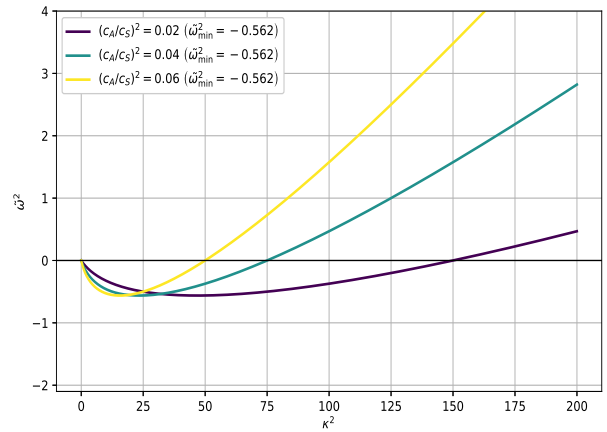


Рис. 4. Дисперсионное соотношение с различными фоновыми полями для случая кеплеровского течения с $n = 0$ (бесструктурный случай).

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как видно из рис. 3, область неустойчивости по вертикальному волновому числу $\kappa = k_z z_0$ сужается при увеличении параметра фонового поля $(\frac{c_A}{c_S})^2$. Это связано с усилением магнитного натяжения (силы Лоренца), подавляющего дифференциальное смещение магнитно-связанных слоев: при большем

с_д коротковолновые возмущения более эффективно стабилизируются и верхняя граница по κ смещается влево.

Также видно, что в бесструктурном случае $n = 0$ (или $\rho_0 = \text{const}$) величина максимального инкремента неустойчивости (минимума дисперсионного соотношения) не зависит от величины фонового поля (параметра $\frac{c_d}{c_s}$), в то время как для случая $n \neq 0$ появляется зависимость от поля из-за вхождения в дисперсионное соотношение производных фоновой плотности. Отметим также, что при $n = 0$ результат полностью совпадает с полученным ранее для бесструктурного течения с $\rho_0 = \text{const}$ в работе [14] (см. рис. 4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе удалось свести влияние вертикальной стратификации сдвигового течения в однородном магнитном поле к компактной форме для планарных возмущений, пригодной для аналитического анализа. В этом приближении получено дисперсионное соотношение с явным появлением структурных вкладов через вертикальные производные $\rho_0(z)$ в окрестности плоскости симметрии. Для выбранного политропного профиля распределения плотности в тонком аккреционном диске выписаны аналитические корни полученного алгебраического уравнения и явная формула для экстремального значения дисперсионной кривой, соответствующей случаю МРН.

Существенным новым результатом является выявленная в структурном случае зависимость значения экстремума дисперсионного соотношения от величины фонового магнитного поля. Из этого можно

сделать вывод, что в рассматриваемом приближении учет вертикальной структуры не только сужает область неустойчивости, но и увеличивает ее максимальный инкремент.

Дополнительным результатом работы является установленная связь между оценкой высоты z_{cr} , ограничивающей область применимости нерелятивистского МГД-подхода, и нижней границей допустимых вертикальных волновых чисел $\kappa_{\min} = \frac{2\pi z_0}{z_{cr}}$. Данное соотношение носит оценочный характер. Тем не менее оно показывает, что существование МРН в рассматриваемой модели определяется не только знаком $\tilde{\omega}^2$, но и наличием перекрытия между областью неустойчивости и областью $\kappa \geq \kappa_{\min}$.

Полученные результаты следует рассматривать с учётом ограничений выбранной модели: в рамках идеальной МГД исключены моды с $u_z \neq 0$, для всех возмущений принято $\partial/\partial r = 0$, задача рассматривалась локально при чисто полоидальном фоновом магнитном поле.

Дальнейшее развитие исследования МРН в стратифицированных сдвиговых течениях естественным образом связано с переходом к нелокальному подходу для вертикально стратифицированного диска: с постановкой краевой задачи по z -координате для нахождения собственных функций и собственных значений, а также с исследованием более реалистичных конфигураций фонового магнитного поля.

Автор благодарит К.А. Постнова и Н.И. Шакуру за полезные обсуждения.

Работа поддержана грантом РНФ № 25-12-00012 (рук. Н.И. Шакура).

- [1] Shakura N. I., Sunyaev R. A. // *Astron. Astrophys.* **24**, 337 (1973).
- [2] Rayleigh Lord // *Proc. R. Soc. A* **93**, 143 (1916).
- [3] Велухов, Е. П. *ЖЭТФ* **36**, 1399 (1959).
- [4] Chandrasekhar S. // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **46**, 253 (1960).
- [5] Balbus S. A., Hawley J. F. // *Astrophys. J.* **376**, 214 (1991).
- [6] Bisnovatyi-Kogan G. S., Ruzmaikin A. A. // *Astrophys. Space Sci.* **28**(1), 45 (1974).
- [7] Stepinski T. F., Levy E. H. // *Astrophys. J.* **362**, 318 (1990).
- [8] Ghosh P., Lamb F. K. // *Astrophys. J. Lett.* **223**, L83–L87 (1978).
- [9] Hawley J. F., Gammie C. F., Balbus S. A. // *Astrophys. J.* **440**, 742 (1995).
- [10] Sorathia K. A., Reynolds C. S., Stone J. M., Beckwith K. // *Astrophys. J.* **749**, 189 (2012).
- [11] Hawley J. F., Richers S. A., Guan X., Krolik J. H. // *Astrophys. J.* **772**, 102 (2013).
- [12] Curry C., Pudritz R. E., Sutherland P. G. // *Astrophys. J.* **434**, 206 (1994).
- [13] Latter H. N., Fromang S., Faure J. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **453**, 3257 (2015).
- [14] Шакура Н. И. (ред.) Аккреционные процессы в астрофизике. М.: Физматлит, 2016. 251 с.
- [15] Шакура Н. И., Постнов К. А., Колесников Д. А., Липунова Г. В. // *УФН.* **193**, № 12, 1340 (2023). (N. I. Shakura, K. A. Postnov, D. A. Kolesnikov, G. V. Lipunova // *Physics Uspekhi.* **66**, No. 12, 12626 (2023)).
- [16] Gammie C. F., Balbus S. A. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **270**, 138 (1994).
- [17] Bonanno A., Urpin V. // *Astrophys. J.* **662**, 851 (2007).
- [18] Shakura N., Postnov K. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **448**, 3697 (2015).
- [19] Ketsaris N. A., Shakura N. I. // *Astron. Astrophys. Trans.* **15**, 193 (1998).
- [20] Rydbeck, O. // *Trans. Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.* **74** (1948).
- [21] Гинзбург, В. Л. *ЖЭТФ* **21**, 788 (1951).

On Planar Perturbations in Vertically Stratified Keplerian Disks in a Uniform Magnetic Field

К. Ю. Парусов

Sternberg Astronomical Institute. Moscow 119991, Russia

E-mail: parusovky@my.msu.ru

A local modal analysis of the magnetorotational instability (MRI) in the midplane of a thin Keplerian accretion disc with polytropic vertical density stratification has been carried out. To obtain an analytic solution, the approximation $\partial/\partial r = 0$ for all perturbations is adopted and planar adiabatic perturbations in an incompressible fluid with $u_z = 0$ are considered. An analytic closed-form dimensionless dispersion relation has been derived, the unstable intervals of the vertical wavenumber k_z are determined, and the MRI-unstable branch is identified. It is shown how the unstable wavenumber ranges and the extremal values of the dispersion curve depend on the strength of the background magnetic field.

PACS: 95.30.Qd, 97.10.Gz

Keywords: accretion disks, magnetorotational instability, magnetohydrodynamics, vertical stratification.

Received 12 March 2026.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2026. **81**, No. 3. Pp. .

Сведения об авторе

Парусов Кирилл Юрьевич — студент 6-го курса астрономического отделения физического факультета МГУ, ведущий программист; e-mail: parusovky@my.msu.ru.