

О применении метода линейных интегральных представлений при восстановлении волнового потенциала в локальном варианте

И.Э. Степанова,^{1,*} И.И. Колотов,² А.В. Щепетилов,² А.Н. Левашов²

¹*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН*

Россия, 123242, Москва, Б. Грузинская ул., д. 10, стр. 1

²*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Поступила в редакцию 05.02.2026; после доработки 06.05.2026; подписана в печать 22.06.2026)

Предложена новая версия метода линейных интегральных представлений для решения обратных задач по восстановлению источников волнового потенциала в локальном варианте. Обратная задача по нахождению источников поля редуцируется к решению плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной правой частью. Приводятся результаты математического эксперимента по нахождению элементов нестационарного гравитационного поля Земли.

PACS: 02.30.Em, 02.30.Zz УДК: 550.8

Ключевые слова: гравитационное поле, функция Грина, линейные интегральные представления, нестационарные поля.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.81.2640101](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.81.2640101)

ВВЕДЕНИЕ

В наше время обработка больших и сверхбольших объемов данных о физических полях Земли и планет Солнечной системы стала достаточно обычной.

Высокая степень разрешения и надежность спутниковых данных являются, безусловно, одним из важнейших достижением науки и техники. Однако, к сожалению, источники как стационарных, так и нестационарных полей, нельзя однозначно восстановить ни по какому сколь угодно большому объему данных в том случае, когда отсутствует априорная информация об их геометрии и глубине залегания. В наших предыдущих работах [1–3] было показано, как можно применить метод линейных интегральных представлений и теорию дискретного потенциала для решения обратных линейных и нелинейных задач геофизики.

Модели физических полей и топографии должны строиться таким образом, чтобы по мере поступления новой информации основные их характеристики менялись плавно, постепенно. Радикальные нарушения структуры полей при применении новой модели должны настораживать исследователей: конечно, точки бифуркации решений нелинейных систем уравнений в частных производных могут существовать, но необходимо строго учитывать условия появления «катастроф» такого рода.

Различные методы и подходы, применяемые при интерпретации геофизических и геодезических данных (см., например, [4–8]), должны быть инкорпо-

рированы в любую новую уточненную модель внутреннего строения Земли и планет.

Ранее нами не рассматривались постановки обратных геофизических задач для уравнений гиперболического типа в рамках метода линейных интегральных представлений. В настоящей статье будет рассмотрена вариационная постановка в локальном варианте по определению эквивалентных по внешнему нестационарному полю источников. При этом предполагается, что полезный сигнал удовлетворяет волновому уравнению (вне источников сигнала — однородному, в области расположения источников — неоднородному). Можно учитывать при постановке различных задач также информацию о градиенте элемента поля [4].

При моделировании нестационарных полей время может выступать как в роли независимой переменной, так и в роли параметра, поскольку решения многих задач для уравнений в частных производных получаются благодаря применению метода спуска по одной из переменных [9]. Предлагаемый в настоящей статье вариант метода линейных интегральных представлений может быть полезен не только при интерпретации данных о физических полях, компоненты которых удовлетворяют неоднородному волновому уравнению с постоянными коэффициентами, но и при решении достаточно широкого круга задач: полезные сигналы могут описываться системой нелинейных уравнений в частных производных с подлежащими определению (в общем случае) граничными и начальными условиями. Если для некоторых полей справедливы интегральные представления, то обратные задачи по поиску пространственного распределения компонент векторных полей и граничных (начальных) условий по известной дополнительной информации

* E-mail: tet@ifz.ru

об искомых полях можно сформулировать с помощью вариационного и структурно-параметрического подходов метода линейных интегральных представлений.

В нашей предыдущей работе было показано, как глобальный вариант метода линейных интегральных представлений в рамках структурно-параметрического подхода может применяться для построения аналитического продолжения магнитного поля Марса вниз, в сторону источников [10]. Аналитическое продолжение вниз стационарного поля особенно актуально при изучении постановок для полей, имеющих тепловой или волновой характер: для успешного восстановления источников таких полей необходимо знание распределения элементов поля в начальный момент времени, а также производной по времени от этого распределения во всем пространстве. Если информация о поле носит дискретный характер, то «на помощь» может прийти теория дискретного потенциала, однако и в этом случае значения элементов поля в узлах сетки наблюдений должны быть известны.

Если Землю представить в виде полупространства, то математическая постановка задачи может быть записана в декартовых координатах, что значительно упрощает как теоретические выкладки, так и вычисления. Как и в случае нестационарных полей, удовлетворяющих уравнениям параболического типа, впоследствии результаты можно будет перенести на случай криволинейной системы координат.

1. ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ

В данной работе все вариационные постановки будут изучены в декартовой системе координат — в криволинейных координатах получить аналитические выражения для элементов как обычных, «непрерывных» сигналов, так и их дискретных аналогов значительно сложнее. Начальные распределения значений элементов физических полей, равно как и их производных, можно построить с различных вариантов метода S-аппроксимаций, причем даже в тех случаях, когда нет никакой информации об источниках полей [1, 10]. Целью настоящего исследования является разработка принципиально нового подхода к решению обратных задач для уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами в условиях недостаточной информации о начальных и граничных условиях — фактически это и есть моделирование геофизических процессов, которые можно описать с помощью постановок прямых и обратных задач такого рода.

Нестационарные физические поля могут быть описаны различными способами.

Среди зарубежных исследователей в последние два десятилетия признанным лидером среди методов описания магнитных полей считается так называемый метод сингулярных магнитных диполей (ESD) [6, 7]. Существует также вариант указанного

метода с линейно зависящими от времени компонентами вектора намагниченности [5].

При математическом моделировании процессов в магнитосфере Земли и других планет Солнечной системы, а также процессов, протекающих в недрах планет, имеющих динамо, считается, что поле скоростей заряженных частиц и магнитное поле удовлетворяют системе уравнений магнитной гидродинамики. Приведем пример так называемой «укороченной» системы уравнений магнитной гидродинамики, описанной в [11] для безразмерных векторных полей и коэффициентов вязкости и магнитной вязкости:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -(\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) + [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}] - \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\{\mathbf{v}, \mathbf{B}\} + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Система (1) связана с так называемым линеаризованным и укороченным уравнением Эйлера, если рассматривать движение заряженной жидкости в среде, занятой магнитным полем, в рамках вариационного подхода.

В (1) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ — соответственно поле скоростей и магнитная индукция как функции радиуса-вектора и времени, ν — безразмерный коэффициент вязкости, ν_m — безразмерный коэффициент магнитной вязкости, ∇p — градиент давления в среде, Δ — оператор Лапласа. Квадратные скобки означают векторное произведение двух векторов, а фигурные скобки — это скобка Пуассона двух векторных полей, определяемая как

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{B}\}_i = \sum_{j=1}^3 \left(v_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - B_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right).\tag{2}$$

Для нахождения приближенного решения системы (1), как было отмечено в [10], необходимо заменить дифференциальные операторы их конечно-разностными аналогами. Помимо этого, необходимо учесть граничные и начальные условия, которым удовлетворяют поля поскольку они являются вектор-функциями трех пространственных координат и времени.

Поле скоростей и магнитное поле всегда связаны между собой, и «отделить» одну вектор-функцию от другой не представляется возможным. Однако можно применить метод последовательных приближений, а именно представить магнитную индукцию и поле скоростей в виде суммы разных по абсолютной величине слагаемых и затем искать решения упрощенных систем, подобных (1). Поскольку оба векторных поля (как магнитное, так и поле скоростей) дифференцируются в (1) по времени, то для каждого из них в упрощенном виде должна получаться некоторая начально-краевая постановка для системы нелинейных уравнений. В упрощенном виде подобную постановку можно рассмотреть для системы линейных уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами.

При разработке математической модели произвольного нестационарного векторного поля можно считать, что какая-то часть сигнала является решением начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа с постоянными коэффициентами. Начальные и граничные данные также необходимо либо определить по какой-либо дополнительной априорной информации о физическом поле, либо аналитически описать, интерпретируя данные наблюдений.

Сочетание вариантов метода линейных интегральных представлений, в которых учитывается зависимость полей от времени, с версиями метода, созданными для интерпретации стационарных сигналов, позволит, на наш взгляд, обеспечить высокую эффективность применяемого подхода в условиях разноточности и разнородности информации об элементах полей. Даже в том случае, когда поле считается стационарным, можно ввести некий параметр, который позволит рассматривать все векторные поля как зависящие от времени. Можно сравнить решения, полученные различными способами, и выбрать наиболее подходящее с точки зрения соответствия априорной информации.

Нестационарность гравитационного поля Земли может быть обусловлена различными геодинамическими процессами [6]. Адекватная интерпретация вариаций земного гравитационного поля важна для решения большого числа геологических, географических и геофизических задач, как это было отмечено в [6].

Как известно, метод спуска по одной из независимых переменных [9] позволяет получить решение краевой задачи в пространстве N переменных, если

найден соответствующее решение в $(N+1)$ -мерном пространстве. Поэтому переход от вектор-функции, зависящей от трех пространственных переменных, к вектор-функции в четырехмерном пространстве (четвертая координата — это время) нам кажется оправданным при построении метрологических аппроксимаций элементов физических полей и топографии.

Если считать Землю (или другую планету) нижним полупространством, ограниченным плоскостью в декартовой системе координат $(0, t)$, то первую краевую задачу для некоторого нестационарного векторного поля можно сформулировать следующим образом.

Пусть известны вектор-функции

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, T], \mathbb{R}^3), \\ \mathbf{W}_0(x_1, x_2, x_3), \mathbf{W}_1(x_1, x_2, x_3) \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3).$$

Требуется найти $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, T], \mathbb{R}^3)$, удовлетворяющую следующему дифференциальному уравнению, начальным и краевым условиям:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \mathbf{W} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \\ 0 < t, x_3 < +\infty, -\infty < x_1, x_2 < +\infty, \\ \mathbf{W}(x_1, x_2, 0, t) = 0, \\ \mathbf{W}(x_1, x_2, x_3, 0) = \mathbf{W}_0(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, 0) = \mathbf{W}_1(x_1, x_2, x_3). \quad (3)$$

Для вектор-функции $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$ известно интегральное представление [13]:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{\mathbf{x}}^{at}} \frac{\mathbf{W}_0(\xi)}{at} d\sigma + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{\mathbf{x}}^{at}} \frac{\mathbf{W}_1(\xi)}{at} d\sigma + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \left(\iint_{S_M^r} \frac{\mathbf{f}(P, t - \frac{r}{a})}{r} d\sigma \right) dr. \quad (4)$$

Здесь

$$r = |\mathbf{x} - \xi| = \\ = ((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2)^{1/2}, \\ P: \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad M: \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Формула (4) получена с помощью нечетного продолжения фундаментального решения волнового уравнения во всем пространстве на нижнее полупространство (см., например, [12]). Здесь $S_{\mathbf{x}}^{at}$ — это сфера радиуса at с центром в точке M , характеризующейся радиусом-вектором $\mathbf{x}$, а P — текущая точка, по координатам которой производится интегрирование.

В общем случае граничное условие Дирихле на дневной поверхности может быть неоднородным:

$$\mathbf{W}(x_1, x_2, 0, t) = \Psi(x_1, x_2, t).$$

Также допустимо рассмотрение граничных условий второго и третьего рода, но в любом случае,

как показано в [9], задача с неоднородными граничными условиями любого рода может быть сведена к краевой задаче вида (4). Поэтому в дальнейшем будем считать, что поле на границе принимает нулевые значения.

На самом деле решения волнового уравнения в трехмерном декартовом пространстве определяются на некотором множестве зависимости от начальных условий [13]. Но поскольку точки наблюдений могут располагаться в любом месте пространства-времени, то лучше сразу потребовать выполнения ограничений ((1)) Для каждой точки $M(\mathbf{x}, t)$ задается конус зависимости $K_{\mathbf{x}}^{at}$

$$K_{\mathbf{x}}^{at} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tau : |\mathbf{x} - \xi| < a(t - \tau)\}.$$

с вершиной в этой точке. Нижнее основание этого конуса обозначим через

$$D_{\mathbf{x}}^{at} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : |\mathbf{x} - \xi| \leq at\}.$$

Таким образом, возмущение в точке $M(\mathbf{x}, t)$ равно нулю в том случае, когда область задания

начальных условий в (3) пересекается с $D_{\mathbf{x}}^{at}$, а источники волн находятся на боковой поверхности конуса $K_{\mathbf{x}}^{at}$.

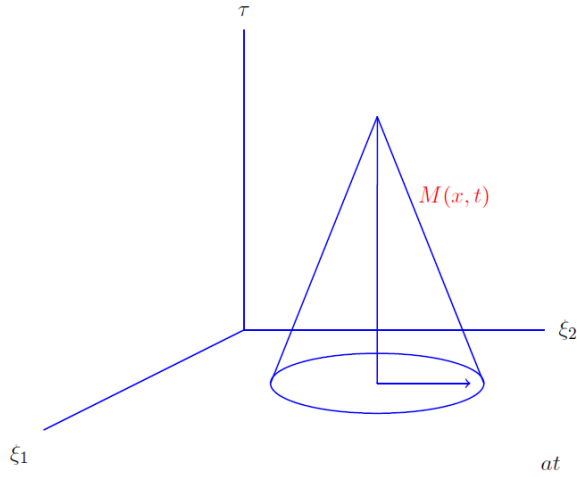


Рис. 1. Конус зависимости $K_{\mathbf{x}}^{at}$ точки $M(\mathbf{x}, t)$

Представления решения краевой задачи (3) или уравнения относительно вектор-функции $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ позволяют нам применить метод линейных интегральных представлений [1, 2] в локальном варианте, когда Земля представляется в виде нижнего полупространства, а компоненты магнитной индукции известны в верхнем полупространстве.

Обратимся к формуле (3) и попробуем сформулировать задачу по поиску минимума некоторого функционала, учитывая при этом, что поле известно в некоторой совокупности точек верхнего полупространства. Вариационные постановки, возникающие при применении различных версий метода линейных интегральных представлений, предполагают наличие минимизируемой по норме $L_2(M_r)$ функции. Здесь $L_2(M_r)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций в областях задания источников поля M_r , $r = 1, \dots, n$.

Для уравнения Лапласа мы всегда ставили вариационные задачи при фиксированном наборе множеств. В настоящей работе будем предполагать, что требуется определить неизвестную мощность источников волн во всем пространстве $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Еще раз подчеркнем, что в пространстве нечетного числа измерений наблюдается так называемый «задний фронт волны», т.е. возмущение может в данный момент времени в данной точке уже не существовать (если источники волн не попадают в конус зависимости для $M(\mathbf{x}, t)$).

Мы предлагаем определять неизвестную мощность источников из следующей вариационной постановки задачи. Найти вектор-функцию $\mathbf{f}_*(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, T], \mathbb{R}^3)$, минимизирующую

функционал:

$$\Omega[\mathbf{f}_*] = \min_{\mathbf{f}(\xi, \tau)} \Omega[\mathbf{f}], \quad \text{где} \quad (5)$$

$$\Omega[\mathbf{f}] := \int_0^T d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{f}(\xi, \tau)|^2 d\xi_1$$

при выполнении условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{x}_i, t_i) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at_i} \left(\iint_{S_{\mathbf{x}_i}^r} \frac{\mathbf{f}\left(P, t_i - \frac{r_i}{a}\right)}{r_i} d\sigma \right) dr = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{D_{\mathbf{x}_i}^{at_i}} \frac{\mathbf{f}\left(P, t_i - \frac{r_i}{a}\right)}{r_i} d\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

где $r_i := |\mathbf{x}_i - \xi| =$

$$= ((x_{i,1} - \xi_1)^2 + (x_{i,2} - \xi_2)^2 + (x_{i,3} - \xi_3)^2)^{1/2},$$

а $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$, $i = 1, \dots, N$ — точки наблюдения.

Будем искать решение задачи (5) методом множителей Лагранжа в рамках первого варианта аппроксимационного подхода [1]:

$$\mathbf{f}(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j \theta(K_{\mathbf{x}_j}^{at_j})}{|\mathbf{x}_j - \xi|}. \quad (7)$$

В (7) через $\theta(D_{\bar{x}_j}^{at_j})$ обозначена характеристическая функция основания конуса зависимости $K_{\mathbf{x}_i}^{at_i}$ с вершиной в точке M_i ; $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T$ — вектор множителей Лагранжа. Таким образом, плотность источников волн в данной точке пространства ξ в текущий момент времени τ зависит только от тех точек наблюдения, конусы зависимости которых содержат данную точку пространства-времени внутри себя. Для нахождения вектора множителей Лагранжа получим следующую СЛАУ (систему линейных алгебраических уравнений):

$$A\lambda = \bar{W}_\delta. \quad (8)$$

В (8) через $\bar{W}_t$ обозначен $3N$ -вектор значений элементов поля в точках сети наблюдений (т.е. предполагается, что известны все три проекции некоторого физического поля в точке сети). Можно, однако, ограничиться знанием только значений какого-то одного элемента поля, например, z -компоненты. Тогда вектор неизвестных будет иметь второе меньшую размерность, N . В системе (8) A есть $(N \times N)$ -матрица со свойством

$$A = A^T \geq 0 \quad (9)$$

и элементами a_{ij} ($1 \leq i, j \leq N$):

$$a_{ij} = \begin{cases} 4\pi \min(R_i, R_j) - 2\pi R, R < R_i, R < R_j, D_{R_i} \cap D_{R_j} = D_{\min(R_i, R_j)}, O_{\max(R_i, R_j)} \in D_{\min(R_i, R_j)}; \\ 2\pi \frac{[\min(R_i, R_j)]^2}{R}, R < R_i, R < R_j, D_{R_i} \cap D_{R_j} = D_{\min(R_i, R_j)}, O_{\max(R_i, R_j)} \notin D_{\min(R_i, R_j)}; \\ \frac{\pi}{R} \{R_i + R_j - R\}^2, R > R_i, R > R_j, R < R_i + R_j; \\ \frac{\pi}{R} \{-3R^2 + 2R_i R + 2R_j R + 2R_i R_j - R_i^2 - R_j^2\}, \\ R < R_i, R < R_j, D_{R_i} \cap D_{R_j} \neq D_{R_i}, D_{R_j}, O_{\max(R_i, R_j)} \in D_{\min(R_i, R_j)}; \\ \frac{\pi}{R} \{-(\max(R_i, R_j) - R)^2 + \min(R_i, R_j)(\min(R_i, R_j) + 2(\max(R_i, R_j) - R))\}, \\ R < R_i, R < R_j, D_{R_i} \cap D_{R_j} \neq D_{R_j}, D_{R_i}, O_{\max(R_i, R_j)} \notin D_{\min(R_i, R_j)}; \end{cases} \quad (10)$$

$$R_i = at_i, \quad R_j = at_j, \quad R = |x_i - x_j|.$$

Формула (10) была получена аналитически, с учетом взаимного расположения конусов зависимости элементов с номерами i и j . В отличие от «стационарного» варианта метода линейных интегральных представлений, в случае волнового уравнения элементы матрицы СЛАУ, к которой редуцируется проблема построения аналитической модели поля, существенно определяются геометрией сети наблюдений и не могут быть выражены единообразно. Данное обстоятельство следует считать важным при выборе способа математического описания того или иного периодического процесса. По нашему мнению, пункты наблюдения необходимо располагать таким образом, чтобы элементы матрицы можно было выразить с помощью средней строки формулы (10): в этом случае будет иметь место диагональное преобладание и не потребуются регуляризации СЛАУ [15]. Таким образом, мы получим корректную постановку задачи аналитического описания нестационарного поля. Диагональные элементы матрицы СЛАУ во всех случаях имеют вид

$$a_{ii} = 4\pi R_i, \quad R_i = at. \quad (11)$$

Отдельно стоит отметить, что элементы матрицы, представленные формулой (10), существенно отличаются друг от друга, в зависимости от того, лежат ли центры нижних оснований конусов зависимости двух точек с индексами i и j в области пересечения указанных оснований или нет. Элементы матрицы системы (8), в соответствии с основными принципами метода линейных интегральных представлений [1], вычисляются по формуле

$$a_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 a^4} \int_{D_{M_i}^{at_i} \cap D_{M_j}^{at_j}} \frac{1}{r_i r_j} d\xi. \quad (12)$$

Интегральное представление (12) для элементов матрицы СЛАУ обладает свойствами двойного слоя: интегрирование выполняется по области пересечения двух шаров с центрами в точках O_i и O_j , величины r_i , $i = 1, \dots, N$ – те же, что в (6). В то же время двойной слой, как известно, терпит разрыв при переходе через границу области интегрирования.

Если необходимо построить аналитическую модель производной по какой-либо пространственной координате элемента поля, то интегральное представление (4) или (6) можно продифференцировать под знаком интеграла. Рассмотрим, например, представление (6), когда начальные значения поля и его производной по времени равны нулю. Продифференцируем правую и левую части (6) по $x_{i,3}$. Получим

$$\frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{x}_i, t_i)}{\partial x_{i,3}} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{D_M^{at}} \frac{\mathbf{f}_{x_3} \left(P, t_i - \frac{r_i}{a} \right)}{r_i} d\xi, \quad (13)$$

$$\mathbf{f}_\tau \left(P, t_i - \frac{r_i}{a} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}(P, \tau)}{\partial \tau}.$$

В (13) $\frac{\partial \mathbf{f}(P, \tau)}{\partial \tau}$ означает производную по времени плотности источника волн. В интегральном представлении (13) рассматривается так называемый запаздывающий потенциал (поскольку волна распространяется с конечной скоростью a): возмущение в точке наблюдения зависит от значения плотности не в текущий момент времени, а в некоторый предшествующий, $t - \frac{r_i}{a}$. Первое равенство в (13) получено с помощью переноса начала координат в точку наблюдения; в этом случае дифференцировать по координатам нужно будет только неизвестную плотность источников $\mathbf{f}(P, \tau)$.

При нахождении аналитических аппроксимаций физических полей, иначе говоря, функций $\bar{W}_0(\xi), \bar{W}_1(\xi), \mathbf{f}(P, t - \frac{r_i}{a})$, основная вычислительная проблема состоит в нахождении устойчивого приближенного решения (согласованного с имеющейся априорной информацией о векторах $\bar{W}(\mathbf{x}, t), \delta \mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$) системы линейных алгебраических уравнений (8).

Для решения систем (8) мы применили два метода, предложенные авторами в работах [14]: блочный метод регуляризации Холецкого (обозначаемый нами через БМХР) и усовершенствованный блочный метод (УБМ). В основе обоих методов лежит механизм адаптивной фильтрации.

На первом этапе построения аппроксимационной конструкции решается СЛАУ по всему набору дан-

ных, затем некоторые блоки матрицы исключаются из рассмотрения, поскольку от них точность аппроксимации зависит незначительно. Параметры регуляризации подбираются для различных блоков «индивидуально». Если пункты наблюдения расположены далеко друг от друга, то, как это было отмечено выше, внедиагональные элементы матрицы будут значительно меньше по абсолютной величине, нежели диагональные. Помимо этого, может так случиться, что конусы зависимости двух элементов вообще не пересекаются — элементы матрицы окажутся равными нулю. Если, наоборот, точки наблюдения находятся слишком близко друг к другу, то матрица СЛАУ будет плохо обусловленной: элементы в одной и той же строке или столбце будут мало отличаться друг от друга.

Таким образом, можно сделать вывод, что предлагаемый в настоящей работе новый метод построения математических моделей нестационарных физических полей может применяться не только для нахождения пространственно-временного распределения элементов нестационарных полей, но и для анализа «качества» входной информации о сети наблюдений: если для каких-то пунктов сети соответствующий элемент матрицы много меньше диагональных по абсолютному значению, то нецелесообразно строить аналитическую модель с использованием данных пунктов одновременно.

Апробация алгоритмов и программ новой методики построения аналитических моделей гравитационного поля в районе Аляски

С помощью изложенной методики была построена математическая модель гравитационного поля в районе Аляски (данные и равномерные сетки наблюдений импортировались из базы спутниковых наблюдений [16]).

Широта и долгота пунктов наблюдения лежали в следующих диапазонах:

$$[63.2^\circ, 63.6^\circ] \times [214.3^\circ, 215.3^\circ].$$

Оттуда же взяты равномерные сетки наблюдений в этой области. Карты изолиний гравитационного поля (z -компоненты) приведены на рис. 2, а). На рис. 2, б) показано поле, построенное с помощью «волнового варианта» S -аппроксимаций. На рис. 3 изображена карта изолиний разности аппроксимированного и реального полей при $a^2 = 1000$.

Мы сформировали два набора входных данных. В первом наборе было 5000 точек, во втором — 10000. Сначала была построена модифицированная S -аппроксимация гравитационного поля с помощью двух методов решения СЛАУ (БМХР и УБМ). Сенсоры (пункты наблюдения) находились на дневной поверхности с характерной высотой 5 км. Затем была искусственно создана нестационарная модель аномального гравитационного поля. Мы взяли два значения параметра a^2 : $a^2 = 100$ и $a^2 = 1000$. В качестве поля $\mathbf{B}(\mathbf{x}_i, t_i)$ у нас фигурировали значения гравитационного поля в точке $\mathbf{x}_i$, а момент времени (виртуальный, если можно так выразиться) у

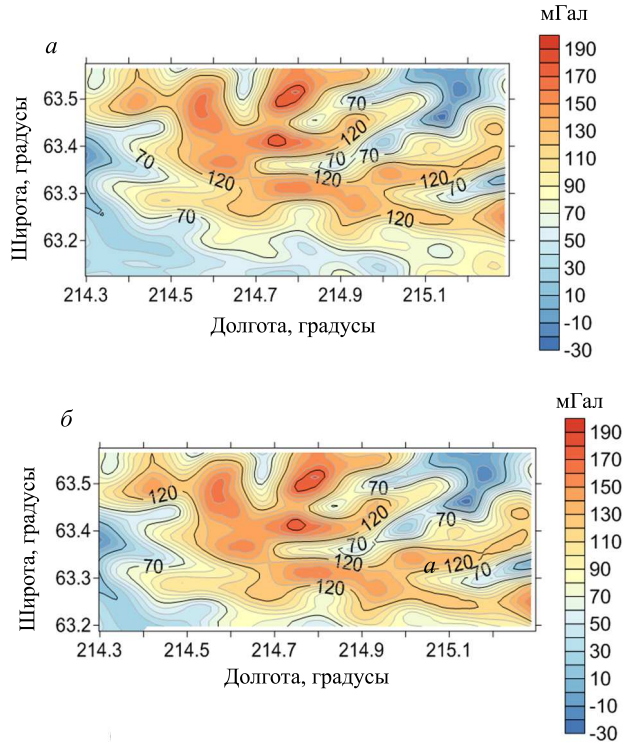


Рис. 2. Карты изолиний гравитационного поля в районе Аляски: а — карта изолиний z -компоненты гравитационного поля, построенная по данным спутниковых наблюдений; б — гравитационное поле, восстановленное с помощью «волнового варианта» S -аппроксимаций

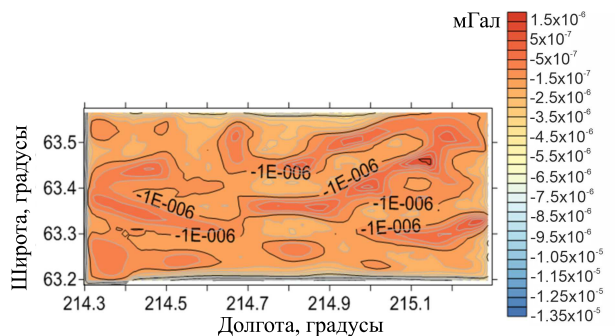


Рис. 3. Карта изолиний разности аппроксимированного и реального гравитационного полей в районе Аляски при значении параметра $a^2 = 1000$

нас был равен

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{g(\mathbf{x}_i)}{a}, \\ g(\mathbf{x}_i) &= 0.6h + 0.12\gamma_i, \\ h &= \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}. \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) через h_p , $p = 1, 2, 3$ обозначен шаг по направлению x_p . В нашем случае шаги по направлениям x_1, x_2 были равны 2 км, по вертикальному направлению (x_3) — 0.2 км. γ_i — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1; 1]$. Вре-

мя можно так задать, если изначально приходится иметь дело с некоторым стационарным элементом поля. Из (14) следует, что гипотетические моменты времени, в которые были выполнены измерения гравитационного поля, отличались друг от друга для точек из набора данных максимум на 20%.

Несомненно, предлагаемый нами алгоритм построения полусинтетического примера обработки геофизических данных не является совершенным. Если известны значения какой-то реально зависящей от времени физической величины, то интегральное представление (6) можно применить к этой величине непосредственно. Моменты времени никак не будут связаны с пространственными координатами точек наблюдения (для спутниковых измерений это не так: координаты точки и время измерения элемента поля зависят друг от друга ввиду движения по заданной траектории).

Требовалось найти функцию $f(P, \tau)$ из решения вариационной задачи (5), которая, как было указано выше, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (8). Пункты наблюдений мы выбирали из базы данных и из множества смоделированных с помощью стационарных модифицированных S -аппроксимаций гравитационного поля таким образом, чтобы элементы матрицы можно было выразить с помощью третьей строки формулы (10). Это было сделано с целью максимизации ранга матрицы СЛАУ и повышения качества приближенного решения задачи оптимизации (5). С помощью стационарной S -аппроксимации находились значения гравитационного поля в точках, которые были расположены так, чтобы центры нижних оснований конусов зависимости двух соседних точек находились вне области пересечения этих оснований (см. (14)). Таким образом, можно констатировать, что совместное применение различных вариантов метода линейных интегральных представлений (как стационарной версии, так и версии, в которой учитывается зависимость от времени) позволяет расширить горизонты исследований и улучшить качество получаемого приближенного решения вариационной задачи. Показатель качества аппроксимации

$$\Delta = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E} \quad (15)$$

в стационарном случае составил 1.3×10^{-8} для набора, состоящего из 5000 точек, а для набора из 10000 — 2.6×10^{-7} . Через x обозначен искомый вектор множителей Лагранжа в системе (8), а через f_δ — вектор правой части с помехой разной интенсивности, $\|f_\delta\|_E$ — евклидова норма вектора.

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\delta_{\max}^2}{N}}, \quad \sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\delta_{\min}^2}{N}} \quad (16)$$

получились равными в случае стационарных аппроксимаций соответственно 0.00015, 0.0001

и 0.0002 мГал для набора из 5000 точек и 0.00018, 0.0001 и 0.0002 мГал — для набора из 10000.

Нестационарные аппроксимации были построены также для двух наборов, содержащих такое же число элементов (но, разумеется, несколько иных, нежели в стационарном случае). Показатели качества решения имели значения: для набора из 5000 пунктов наблюдения — 3.4×10^{-6} . Для вдвое большего ансамбля точек показатель качества решения получился равным $4.1 \cdot 10^{-5}$. Среднеквадратические отклонения составили 0.0016 и 0.0019 мГал соответственно.

На рис. 3 показано гравитационное поле, построенное с помощью волновой S -аппроксимации для набора из 10000 точек. На рис. 4 изображено распределение источников поля в случае нестационарной аппроксимации.

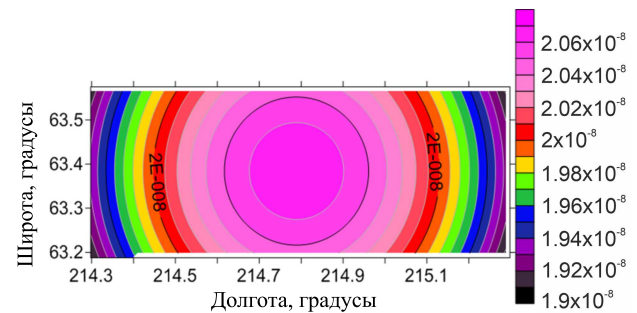


Рис. 4. Распределение источников гравитационного поля в районе Аляски, восстановленное в рамках нестационарной аппроксимации по данным набора из 10000 пунктов наблюдения с использованием волнового варианта S -аппроксимаций

Алгоритм был протестирован также на данных о вариациях гравитационного поля Земли, полученных с помощью спутниковой миссии GRACE [17]. Мы рассмотрели участок съемки в районе Канлаона — действующего стратовулкана в северно-центральной части острова Негрос на Филиппинах, расположенного приблизительно в 32 км к юго-востоку от города Баколод. Значения гравитационного поля измерялись в течение 176 месяцев, мы выбрали 10 из них и сформировали выборку, содержащую 10000 точек. Затем построили матрицу соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (см. формулы (8)–(10)). СЛАУ решалась УБМ-методом. σ , $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$ составили $1.7 \cdot 10^{-10}$, $1.5 \cdot 10^{-10}$, $1.8 \cdot 10^{-10}$ соответственно. Вариации гравитационного поля, как известно, характеризуются величинами порядка микрогал.

На рис. 5, а, б представлена вариация гравитационного поля по данным миссии GRACE и карта изолиний разности между значениями вариаций и значениями поля, полученными с помощью изложенной в статье методики (волнового варианта метода S -аппроксимаций).

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку устойчивых алгоритмов вычисления линейных трансформант нестационарных полей (на-

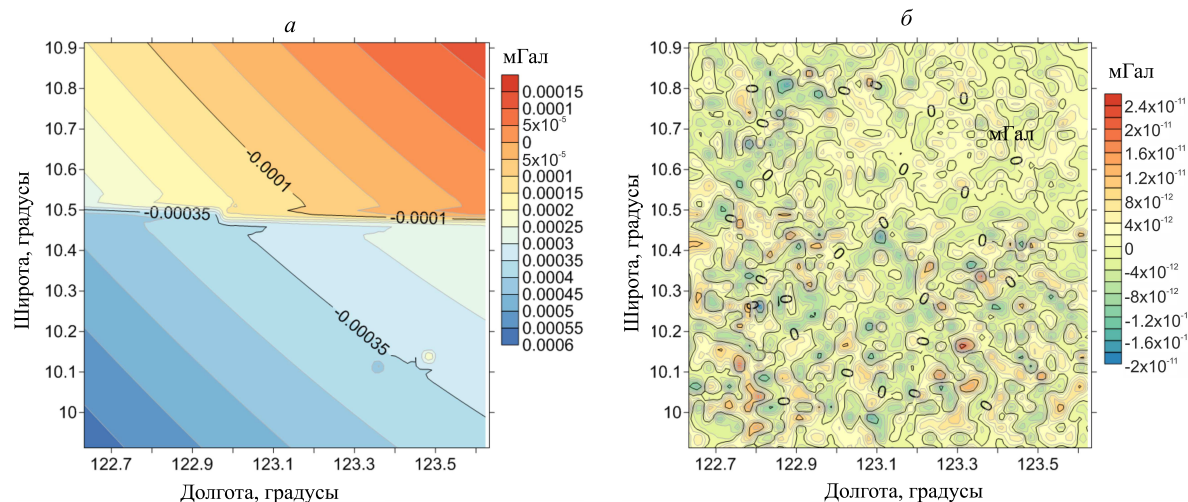


Рис. 5. Вариации гравитационного поля Земли в районе вулкана Канлаон (о. Негрос, Филиппины) по данным спутниковой миссии GRACE: *а* — карта вариаций гравитационного поля; *б* — карта изолиний разности между наблюдаемыми вариациями и значениями поля, восстановленными с использованием волнового варианта метода *S*-аппроксимаций по выборке из 10000 точек

хождения высших производных потенциалов и аналитических продолжений полей в сторону источников). Также предполагается выявить условия однозначной разрешимости системы (8). Это необходимо сделать с целью получения устойчивых приближенных решений вариационной постановки (8). Если матрица СЛАУ плохо обусловлена, то единственность, безусловно, места не имеет, но даже в этом случае возможна регуляризация исходной задачи и, следовательно, качественная интерпретация геофизических данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый вариант метода линейных интегральных представлений, который может применяться как для интерпретации данных о нестационарных геофизических полях, так и для выполнения количественного и качественного анализа свойств сети наблюдений в плане проведения дальнейших исследований на том или ином полигоне. Интегральные представления нестационарных векторных полей могут быть полезны при решении прямых и обратных задач для систем нелинейных уравнений в частных производных: такой подход позволяет в ряде случаев редуцировать исходную постановку к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с симметрической положительно полуопределенной матрицей. Устойчивое

к помехам в правой части приближенное решение СЛАУ находится с помощью различных регуляризирующих алгоритмов.

Новая методика решения линейных обратных задач геофизики включает в себя постановку вариационной задачи, определение области зависимости для каждого из пунктов наблюдений, выбор наиболее эффективного алгоритма для получения устойчивого приближенного решения обратной задачи, а также рекомендации по улучшению качества интерпретации тех или иных данных. При применении «волнового» варианта модифицированных *S*-аппроксимаций ключевую роль играет изучение геометрии сети наблюдений и пополнение базы данных с помощью уже имеющегося арсенала средств, например стационарных версий метода линейных интегральных представлений. В «волновом» варианте *S*-аппроксимаций свойства матрицы СЛАУ, к которой редуцируется проблема нахождения эквивалентных по внешнему полю источников, выражены наиболее «рельефно»: если пункты измерений поля находятся далеко друг от друга, то соответствующие элементы матрицы равны нулю в точности (в стационарном случае этот факт не имеет места и система уравнений зачастую вообще не регуляризуется, особенно при интерпретации профильных данных).

Работа выполнена в рамках госзадания ИФЗ РАН.

- [1] Страхов В.Н., Степанова И.Э. // Физика Земли. № 7. 3 (2002).
- [2] Раевский Д.Н., Степанова И.Э. // Физика Земли. № 2. 44 (2015).

- [3] Stepanova I. E., Kolotov I. I., Yagola A. G. et al. // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. **65**. 603 (2025).
- [4] Wang Y., Lukyanenko D., Yagola A. // *Inverse*

- Problems and Imaging. **13**. 745 (2019).
- [5] Whaler K.A., Purucker M.E. // *Journal of Geophysical Research*. **110**. E09001 (2005).
- [6] Ткаченко Н.С., Лыгин И.В. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. № 2. 3 (2017).
- [7] Oliveira J.S., Langlais B., Pais M.A., Amit H. // *Journal of Geophysical Research: Planets*. **120**. 1075(2015).
- [8] Михайлов В.О., Тимошкина Е.П., Киселева Е.А. и др. // *Физика Земли*. № 5. 56 (2019).
- [9] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
- [10] Степанова И.Э., Щепетилов А.В., Михайлов П.С. // *Физика Земли*. № 2. 20 (2023).
- [11] Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2007.
- [12] Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1980.
- [13] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
- [14] Pan L., Quantin C., Tauzin B. et al. // *Icarus*. **338**. 113511 (2020).
- [15] Wang Y., Leonov A., Lukyanenko D., Yagola A. // *CSIAM Transactions on Applied Mathematics*. **1**. 53 (2020).
- [16] Topex/Poseidon, Jason-1, Jason-2/OSTM, Jason-3. Geophysical Data Records (GDR). Scripps Institution of Oceanography, University of California San Diego. URL:https://topex.ucsd.edu/cgi-bin/get_data.cgi
- [17] GRACE: Gravity Recovery and Climate Experiment. Level-2 Data Products. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology. URL:<https://grace.jpl.nasa.gov>

On the Application of the Method of Linear Integral Representations in the Reconstruction of the Wave Potential in the Local Version

I.E. Stepanova^{2,a}, I.I. Kolotov¹, A.V. Shchepetilov¹, A.N. Levashov¹

¹Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia

²Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences
Russia 123995, Moscow

E-mail: ^atet@ifz.ru

A new version of the linear integral representation method is proposed for solving inverse problems of reconstructing wave-potential sources in the local version. The inverse problem of determining the field sources is reduced to solving ill-conditioned systems of linear algebraic equations with an approximately given right-hand side. The results of a mathematical experiment on finding elements of the Earth's non-stationary gravitational field are presented.

PACS: 02.30.Em, 02.30.Zz

Keywords: gravitational field, non-stationary field, Green function, linear integral representations.

Received 05 February 2026.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2026. **81**, No. . Pp. .

Сведения об авторах

1. Степанова Инна Эдуардовна — доктор физ.-мат. наук, профессор РАН, гл. науч. сотрудник ИФЗ РАН; . e-mail: tet@ifz.ru.
2. Колотов Игорь Иванович — канд. физ.-мат. наук; . e-mail: corners@list.ru.
3. Щепетилов Алексей Валериевич — доктор физ.-мат. наук, доцент;
4. Левашов Андрей Николаевич — аспирант; e-mail: levashov.an16@physics.msu.ru.