

ОБЗОР

Нестандартные модели и новые вычисления в физике частиц, гравитации и космологии

П. А. Байков,¹ Э. Э. Боос,¹ В. Е. Буничев,¹ С. Ю. Вернов,¹ И. П. Волобуев,¹
 М. Н. Дубинин,^{1,*} В. О. Егоров,¹ Д. М. Казаркин,¹ А. Е. Пухов,¹ В. И. Саврин,¹
 В. А. Смирнов,¹ М. Н. Смоляков,¹ В. Е. Тарасов,¹ Е. Ю. Федотова¹

¹ Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына,
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
 Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 22.12.2025; подписана в печать 22.07.2026)

В обзоре изложены актуальные результаты исследований широкого профиля в области физики элементарных частиц, калибровочных моделей квантовой теории поля, теории гравитации и космологии, а также решеточных нелокальных теорий поля. Развитие многопетлевых вычислений в квантовой теории поля представляет большую ценность для приложений теоретических методов. Оригинальные результаты, относящиеся к «новой физике» вне рамок стандартной модели, инфляционным космологиям и многопетлевым вычислениям, имеют большое значение для современной физики высоких энергий, формируя основу для последующих приложений в области теории элементарных частиц и космологии.

PACS: 12.15-у, 14.65.На, 14.80.-j, 14.40.Nd УДК: 539.1

Ключевые слова: физика высоких энергий, Стандартная модель, теории поля с дополнительными измерениями, нелокальные теории поля на решетке, новая физика вне рамок Стандартной модели, эксперименты на коллайдерах, многопетлевые вычисления, инфляционные космологии, темная материя.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.81.2640201](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.81.2640201)

ВВЕДЕНИЕ

В обзоре изложены актуальные результаты исследований в области теоретической физики высоких энергий. Широкий профиль проводимых исследований не позволяет рассмотреть многообразные детали теоретических подходов и их взаимосвязь в рамках одного обзора, вследствие чего более подробные сведения содержатся в расширенном списке литературных источников.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕОРИЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Гипотеза о существовании дополнительных измерений пространства-времени обсуждается в теоретической физике уже более ста лет, а в конце XX века эта гипотеза прочно обосновалась в теоретической физике высоких энергий как одна из наиболее важных. В настоящее время в рамках теорий с дополнительными измерениями пространства-времени общепринятым является представление о локализации полей Стандартной модели на четырехмерной гиперповерхности в многомерном пространстве-времени, которое лежит в основе всех

современных теорий, получивших название моделей мира на бране. Модели мира на бране — это теории с дополнительными измерениями пространства-времени, в которых материя, образующая наш мир, предполагается локализованной на трехмерной поверхности в многомерном пространстве-времени, называемой мембраной, или просто браной. Такие модели появились в конце девяностых годов прошлого века и сразу вызвали большой интерес, поскольку дополнительные измерения в таких теориях могут иметь большой размер. Благодаря этому в них решается проблема иерархии гравитационного взаимодействия, то есть гравитация во всем многомерном пространстве сравнима по силе с остальными взаимодействиями, и только ее ограничение на брану оказывается слабым.

Наиболее интересной моделью мира на бране с точки зрения феноменологических следствий представляется стабилизированная модель Рэндалл–Сундрума. Характерной чертой этой модели является появление у безмассового гравитона, а в некоторых вариантах теорий и у полей Стандартной модели бесконечных серий тяжелых возбужденных состояний, которые получили название калуца-клейновских башен, а также присутствие в них легкого скалярного поля, которое называется полем радиона, имеет те же квантовые числа, что и бозон Хиггса Стандартной модели, и при соответствующих условиях может с ним смешиваться. Здесь мы кратко изложим наиболее важные полученные результаты. В работах [1, 2] было впервые

* E-mail: dubinin@theory.sinp.msu.ru

развито лагранжево описание линеаризованной гравитации в модели Рэндалл–Сундрума, которое позволило найти правильную нормировку полей, возникающих из флуктуаций гравитационного поля, и последовательно описать их взаимодействия с полями Стандартной модели. Важным результатом было также нахождение фундаментального пятимерного энергетического масштаба в этой модели, который оказался порядка десятков тераэлектронвольт [3], в отличие от считавшегося ранее фундаментальным планковского масштаба. Как было показано в этой работе, последний является вторичным и характеризует гравитационное взаимодействие только на бране, где расположен наш мир. Также важным новым результатом было последовательное выделение физических степеней свободы в стабилизированных моделях мира на бране [4].

При определенных значениях параметров моделей мира на бране калуца-клейновские башни гравитона и векторных бозонов Стандартной модели могут либо наблюдаться в экспериментах на современных коллайдерах как достаточно узкие резонансы, если их массы не превосходят примерно 10 ТэВ, либо в противном случае такие прямо не наблюдаемые калуца-клейновские башни могут приводить к отклонениям от предсказаний Стандартной модели для различных процессов на коллайдерах. Эти вопросы были исследованы в работах [5–7], в которых были сделаны предсказания для экспериментов на коллайдерах TEVATRON и LHC.

Также были исследованы подброды полей Хиггса и радиона и возможность смешивания этих полей [8–10]. В частности, в последней работе в модели со смешиванием полей Хиггса и радиона было показано, что предположительно найденное на LHC скалярное состояние с массой 750 ГэВ не может быть смешанным состоянием с доминированием радиона.

Наконец, отметим еще работу [11], в которой была исследована и подтверждена устойчивость стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума относительно квантовых поправок, что также подтверждает корректность вычисления в этой модели квантовых поправок к процессам рассеяния.

Результаты практически всех проведенных в этой области исследований были представлены в двух обзорах [12, 13].

2. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЕ ОПИСАНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ НЕЙТРИНО

В настоящее время процессы рассеяния элементарных частиц описываются с большой точностью в рамках Стандартной модели с использованием формализма S-матрицы и техники диаграмм Фейнмана. Этот подход подразумевает, что процессы рассеяния происходят во всем пространстве-времени, а входящие и выходящие частицы описываются плоскими волнами. Это приближение оказывается очень хорошим для процессов рассеяния. Однако

оно не подходит для описания явлений осцилляций частиц, поскольку процессы осцилляций происходят на конечных интервалах пространства и времени. По этой причине осцилляции нейтрино обычно описываются в рамках квантово-механических подходов в терминах либо плоских волн, либо волновых пакетов. Тем не менее оба эти подхода противоречивы, поскольку они используют так называемые состояния нейтрино с определенными ароматами, которые определяются как суперпозиции собственных массовых состояний нейтрино, но не могут рассматриваться как истинные квантовые состояния. Таким образом, необходимо построение последовательного квантово-теоретико-полевого описания осцилляций нейтрино.

Чтобы описать осцилляции нейтрино в рамках квантовой теории поля и S-матричного подхода, необходимо каким-то образом учесть конечность расстояний и временных интервалов. Для этого в ряде работ для описания всех взаимодействующих частиц использовались локализованные волновые пакеты. Однако вычисления в рамках подхода волновых пакетов оказываются весьма сложными. Причина в том, что стандартный формализм S-матрицы не подходит для описания процессов, протекающих на конечных интервалах пространства-времени.

В работах [14–18] был разработан модифицированный пертурбативный подход к описанию нейтринных осцилляций. Он основан на диаграммной технике Фейнмана в координатном представлении, дополненной модифицированными правилами перехода к импульсному представлению. Последние отражают геометрию экспериментов по осцилляциям нейтрино и приводят к модификации фейнмановского пропагатора собственных массовых состояний виртуального нейтрино в импульсном представлении. А именно возникает зависящий от расстояния пропагатор собственных массовых состояний нейтрино в импульсном представлении, в то время как остальные правила Фейнмана в этом представлении остаются прежними. Описание в терминах плоских волн позволяет избежать громоздких вычислений, уловив при этом суть явления.

Известно, что на осцилляции нейтрино влияют внешние поля и материя. Вопрос о влиянии магнитного поля на осцилляции нейтрино и его значение для проблемы солнечных нейтрино изучались в рамках стандартного квантово-механического описания во многих работах, однако эта проблема никогда не изучалась в рамках квантово-полевого описания осцилляций нейтрино в терминах волновых пакетов, поскольку соответствующие вычисления были бы слишком сложными. В работе [19] были изучены осцилляции нейтрино в постоянном магнитном поле в модифицированном квантовом теоретико-полевым формализме, который позволяет не только рассмотреть проблему солнечных нейтрино, но при этом еще и учесть внутреннюю структуру Солнца.

3. МЕХАНИЗМЫ ГЕНЕРАЦИИ МАСС НЕЙТРИНО В МОДЕЛЯХ С РАСШИРЕНИЕМ ЛЕПТОННОГО СЕКТОРА

Как известно, в рамках Стандартной модели (SM) возможно введение правого дираковского нейтрино, взаимодействующего только с гравитацией (стерильное нейтрино) и генерация масс стандартных («активных») нейтрино юкавскими членами взаимодействия, форма которых аналогична сектору кварков. Различие констант Юкавы в такой схеме на 15 порядков для генерации наблюдаемого спектра масс кварков и стандартных нейтрино представляется неестественной «точной настройкой», вследствие чего в течение продолжительного времени рассматриваются модели с расширением лептонного сектора SM тремя поколениями майорановских нейтрино [20], наиболее легкое из которых после перехода в массовый базис является квазистабильной частицей — кандидатом на роль частицы темной материи (нейтральный тяжелый лептон первого поколения), а сравнительно короткоживущие тяжелые лептоны второго и третьего поколения могут наблюдаться в экспериментах на ускорителях в процессах с нарушением лептонного числа на две единицы [21]. Переходы в массовый базис для генерации масс майорановских активных нейтрино и тяжелых нейтральных лептонов известны как «механизмы качелей» (seesaw mechanisms). Ограничения на параметрические сценарии (массы, углы смешивания) в рамках механизмов seesaw рассматривались в множестве работ. Реалистические формы для матриц смешивания в случае трех поколений нейтральных тяжелых лептонов с учетом космологических ограничений на время жизни тяжелых лептонов первого поколения и соответствующую плотность энергии для частиц темной материи рассматривались в работе [22]. Ограничения для процедуры диагонализации в матричной форме для общей матрицы смешивания 6×6 в лептонном секторе (диагонализация Касаса–Ибарры [23]) получены в работе [24]. Возможное наблюдение нарушения лептонной универсальности в моделях seesaw type I и/или усиление модельно-зависимых ограничений рассмотрено в работе [25]. Механизм seesaw type I часто вызывает интерес как предельный случай моделей электрослабого взаимодействия с лево-право киральной симметрией $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Генерация масс нейтрино в моделях такого типа и феноменологические следствия рассматривались в работах [26, 27].

4. ПАКЕТ ПРОГРАММ MICROMEGAS ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

Несмотря на многочисленные доказательства существования темной материи (ТМ) в галактическом и в космологическом масштабах, природа ТМ

не выяснена. Исходя из хорошо обоснованной гипотезы о том, что она состоит из одной или нескольких новых частиц в некотором расширении стандартной модели физики элементарных частиц, проводятся обширные экспериментальные программы по активному поиску ТМ. Для того, чтобы оценить жизнеспособность различных моделей ТМ с учетом как астрофизических данных, так и данных ускорителей частиц, на протяжении длительного времени разрабатывался пакет программ MicrOMEGAs [28], позволяющий точно вычислять наблюдаемые величины ТМ для широкого набора расширений стандартной модели, включая вышеупомянутые расширения лептонного сектора. Как и для пакетов программ аналогичного назначения, проводится расчет реликтовой плотности ТМ в предположении, что ее космическое распространение обусловлено механизмом вымораживания (freeze-out), хотя в последнее время стали рассматриваться альтернативные механизмы генерации ТМ со сценариями типа freeze-in [29]. Пакет программ MicrOMEGAs позволяет вычислять множество наблюдаемых величин, связанных с ТМ. В рамках сценариев космологической эволюции, где ТМ является новой слабо взаимодействующей массивной частицей (WIMP), расчет ее реликтовой плотности следует формализму, описанному в [30], и основывается на предположении, что в достаточно ранние космические времена ТМ, как и все другие экзотические частицы, находились в кинетическом и химическом равновесии с частицами Стандартной модели. Уравнение эволюции для частиц ТМ, позволяющее получить их реликтовую плотность, является модификацией уравнения Больцмана. При помощи пакета MicrOMEGAs производится численное решение уравнений Больцмана как в случае теплового равновесия компонент темной материи с термальной средой ранней Вселенной, так и в случае, когда темная материя взаимодействует слишком слабо, чтобы достичь равновесия. Учитываются всевозможные процессы распада, а не только столкновений. Все сигналы для прямого или косвенного обнаружения темной материи учитывают вклад каждого ее компонента в общую плотность реликтов.

5. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ШВАРЦШИЛЬДА

Построение квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, где гравитационное поле описывается метрикой, образующей классический фон, а все остальные физические поля предполагаются квантованными, является важной проблемой, широко обсуждаемой в научной литературе. Считается, что квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени является хорошей моделью для описания квантовых эффектов во внешнем гравитационном поле и представляет интерес благодаря своим приложениям к физике черных дыр.

Однако проблема квантования поля в присутствии черных дыр весьма специфична. Хотя она широко обсуждается в литературе, многие вопросы до сих пор остаются недостаточно проясненными, один из которых — нужно ли (или как) учитывать область под горизонтом черной дыры. В работах [31, 32] показано, что последовательная процедура канонического квантования скалярного и спинорного полей в пространстве-времени Шварцшильда может быть осуществлена без учета внутренней области черной дыры. В работе [33] аналогичная программа была реализована и для электромагнитного поля. Построение квантовых теорий спинорного и электромагнитного полей в пространстве-времени Шварцшильда позволяет перейти к квантовой электродинамике в этом пространстве-времени, что дает возможность рассмотреть квантовое описание падения заряженных частиц на черную дыру с испусканием фотонов. Такое описание, учитывающее тонкие квантовые эффекты, может повлиять на результаты, касающиеся скорости аккреции вещества черной дырой, или предсказать другие наблюдаемые эффекты. Однако для нахождения амплитуд и вероятностей процессов излучения фотонов при переходах заряженных частиц между уровнями энергии в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда необходимы хотя бы приближенные волновые функции спинорного и электромагнитного полей в пространстве-времени Шварцшильда, потому что численные расчеты вблизи горизонта черной дыры практически невозможны. Задача нахождения точных решений для скалярного поля в гравитационном поле черной дыры была решена в работе [34]. Оказалось, что такие точные решения выражаются через конфлюэнтные функции Гойна и аналогичные решения могут быть найдены и для спинорного и электромагнитного полей.

6. ИНФЛЯЦИОННЫЕ МОДЕЛИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ

6.1. Модели космологической инфляции

Модели ускоренного расширения ранней вселенной (космологической инфляции) были предложены в начале 1980-х годов [35–42] для решения проблем Стандартной космологической модели, предполагающей только замедленное ускорение вселенной. Отметим, что данные модели появились до обнаружения современного ускоренного расширения вселенной, которое подтвердило предсказанную инфляционными моделями пространственную плоскостность наблюдаемой вселенной. Среди наиболее ранних моделей инфляции были как модели общей теории относительности с минимально связанными скалярными полями [38, 40], так и модели, основан-

ные на модифицированной гравитации [35, 42].

Отметим также работы, связывающие инфляцию с суперсимметричными моделями физики частиц [39, 41]. После получения новых ограничений на отношение квадратов амплитуд тензорных и скалярных возмущений r оказалось, что именно инфляционные модели модифицированной гравитации, включая наиболее ранние модели [35, 42], наилучшим способом описывают наблюдательные данные полученные коллаборациями Planck [43] и BICEP [44]. Представленные в 2025 г. данные коллаборации АСТ [45, 46] существенно увеличили среднее наблюдаемое значение спектрального индекса n_s , что стимулировало поиск новых инфляционных моделей, в частности новых обобщений модели Старобинского [35]. История и современный статус инфляции подробно описаны в статье [47].

6.2. Модели с неминимально связанным скалярным полем и модели $F(R)$ гравитации

Инфляционная модель $R + R^2$ гравитации, предложенная в работе [35], однозначно предсказывает значения инфляционных параметров n_s и r . Поскольку значение r на данный момент не подтверждено наблюдениями, оно только ограничено сверху, то является актуальным поиск новых моделей $F(R)$ гравитации, которые содержат дополнительный свободный параметр и допускают различные значения r .

Данное исследование было начато в статье [48] и продолжено в [49]. Как известно, модель Старобинского с помощью конформного преобразования метрики можно превратить в модель ОТО с минимально связанным скалярным полем ϕ , потенциал которого монотонно возрастает при положительных ϕ и стремится к константе при $\phi \rightarrow +\infty$. Добавление в действие модели слагаемых $c_n R^n$ с константами c_n и $n > 2$ приводит при больших значениях R либо к неустойчивости модели при $c_n < 0$, либо к появлению максимума у потенциала скалярного поля при $c_n > 0$. В любом случае для получения инфляционного сценария начальное значение скаляра Риччи должно быть меньше определённого конечного значения. Иными словами, в подобных моделях область начальных данных, приводящих к инфляции, гораздо меньше, чем в модели [35].

В статье [48] предложено обобщение инфляционной модели [35] путём добавления в действие слагаемого, пропорционального $R^{3/2}$. Это позволило построить допускающую различные значения r инфляционную модель, не сужая область начальных данных, приводящих к инфляции. Недостатком предложенной модели можно считать плохое поведение при всех $R \leq 0$. Для решения этой проблемы в статье [49] была предложена модель, описываемая действием

$$F(R) = \frac{M_{Pl}^2}{2} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \beta \delta \right) R + \frac{R^2}{6m^2} + \frac{\delta}{m} (R + \beta^2 m^2)^{3/2} - m^2 \beta^3 \delta \right], \quad (1)$$

с безразмерным параметром $0 \leq \delta \leq 4\sqrt{3}/9$ и $\beta = \sqrt{3} - 9\delta/4$. Эта модель позволяет получить любое значение r из интервала $0.0027 < r < 0.015$.

В статьях [48, 49] вычисления инфляционных параметров производилось в формулировке Эйнштейна, получаемой конформным преобразованием метрики. При этом потенциал скалярного поля во всех предложенных моделях получен в аналитическом виде. Однако требование существования потенциала минимально связанного скалярного поля в аналитическом виде сильно сужает круг моделей $F(R)$ гравитации, поскольку данное требование не выполняется для многих элементарных функций $F(R)$. Аналогичная ситуация наблюдается и для моделей с неминимально связанным скалярным полем и потенциалами в виде элементарных функций. Для решения этой проблемы было предложено новое приближение медленного скатывания в исходной формулировке Йордана, позволяющее получить значения инфляционных параметров без перехода в формулировке Эйнштейна. В работе [50] был предложен новый вариант приближения медленного скатывания для моделей с неминимально связанным скалярным полем. На примере инфляционной модели с бозоном Хиггса [51] показано, что предложенное приближение позволяет вычислить инфляционные параметры и продолжительность инфляции точнее, чем другие приближения медленного скатывания в формулировке Йордана. Аналог нового приближения для инфляционных моделей $F(R)$ гравитации предложен в работе [52]. С его помощью удалось построить новую инфляционную модель $F(R)$ гравитации с полиномиальной функцией $F(R)$ пятой степени. Как уже отмечалось, результаты полученные коллаборациями Planck и BICEP подтвердили предсказания модели Старобинского, однако представленные в 2025 г. данные коллаборации АСТ [45, 46] существенно увеличили наблюдаемое значение инфляционного параметра n_s . Предложенная в работе [52] модель наилучшим образом соответствует наблюдательным данным, полученным коллаборацией АСТ.

6.3. Модели гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне

Другим направлением обобщения простейших инфляционных моделей является добавление слагаемых, которые могут рассматриваться как часть гравитационного низкоэнергетического эффективного действия в четырёх пространственно-временных измерениях, полученного из многомерного действия теории струн или суперструн. В частности, исследование гравитационных моделей со скалярным полем, неминимально взаимодействующим с членом

Гаусса–Бонне, а также с нелинейной функцией члена Гаусса–Бонне мотивировано теорией струн. Среди множества работ по построению моделей инфляции в гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне отметим статьи [53–56], в которых стандартное приближение медленного скатывания выписано в терминах эффективного потенциала, что позволяет строить модели, задавая инфляционные параметры n_s и r как функции числа e -фолдов. Этот подход, развитый в работах [54–57], обобщает метод космологических аттракторов (см. статью [47] и ссылки в ней) на модели гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне. В статьях [53, 58] показано, что добавление члена Гаусса–Бонне, помноженного на функцию скалярного поля, позволяет получить наблюдаемые значения инфляционных параметров в моделях с мономиальными потенциалами, обобщающие модели Линде [38, 40]. Отметим, что в работе [58] предложены новые варианты приближения медленного скатывания для моделей Эйнштейна–Гаусса–Бонне.

Примером мотивированной теорией суперструн модели является гравитация Старобинского–Бела–Робинсона, предложенная в статье [59]. Действие модели включает в себя два слагаемых модели Старобинского и дополнительные два слагаемых. Одно из слагаемых не влияет на инфляцию, а второе является квадратом члена Гаусса–Бонне. В статье [60] проанализирован инфляционный сценарий в гравитации Старобинского–Бела–Робинсона и найдена область допустимых параметров модели.

6.4. Двухполевые модели и рождение первичных чёрных дыр

Чёрная дыра называется первичной, если она образовалась до эпохи доминирования материи. Вероятность того, что значительная часть или даже вся тёмная материя не является новой формой материи, а состоит из первичных чёрных дыр (ПЧД) активно обсуждается в обзорах [61, 62]. Гипотеза о существовании ПЧД подтверждается растущим количеством прямых и косвенных наблюдений чёрных дыр с массами, выходящими за пределы астрофизического диапазона, возникновение которых не описывается моделями звёздного коллапса. В частности, огромные массы чёрных дыр, обнаруженных в центрах галактик, позволяют выдвинуть гипотезу о том, что галактики образовались вокруг уже существовавших чёрных дыр [63].

Наиболее популярный механизм образования ПЧД предполагает существование избыточных плотностей, превышающих некоторое критическое значение и возникающих в процессе инфляции. Эти избыточные плотности могут образовывать

ПЧД в эпоху доминирования радиации [62]. Известно, что условия медленного скатывания должны быть нарушены в моделях, которые объединяют инфляцию и формирование ПЧД [64]. Во многих двухполевых моделях одно скалярное поле играет роль инфлатона в начале инфляции, а другое поле играет ту же роль в конце. Исследования таких инфляционных моделей с двумя стадиями инфляции показывают, что возмущения плотности в момент, соответствующий переходу между этими двумя инфляционными стадиями, могут быть настолько велики, что приводят к образованию ПЧД [64, 65].

Отметим, что в многополевых моделях, например основанных на суперсимметричных моделях физики частиц, возможен и другой сценарий, когда несколько скалярных полей эволюционирует одновременно и их комбинация играет роль инфлатона на всём протяжении инфляции (см. статьи [66, 67] и ссылки в них). В подобных моделях не происходит нарушения режима медленного скатывания почти до окончания инфляции, и они не описывают процесс формирования ПЧД.

В работах [68, 69] были предложены инфляционные модели модифицированной гравитации с нарушением режима медленного скатывания, что делает возможным формирование ПЧД.

В статье [68] предложена инфляционная модель индуцированной гравитации с двумя скалярными полями. Конформным преобразованием метрики эта модель преобразуется в киральную космологическую модель [64, 65, 70]. Подобную модель можно получить и из модели $F(R)$ гравитации со скалярным полем, как показано в работе [69]. Анализ поведения скалярных полей во время инфляции демонстрирует, что построенные инфляционные модели не противоречат данным наблюдений и подходят для формирования ПЧД. Выбор параметров предложенных моделей позволяет получить массы чёрных дыр, подходящие для рассмотрения полученных ПЧД в качестве кандидатов в тёмную материю [68, 69].

Анализ предложенных двухполевых моделей проводился в формулировке Эйнштейна. В будущих исследованиях планируется провести аналогичный анализ в формулировке Йордана.

7. МОДЕЛИ РАСШИРЕННОГО СЕКТОРА ХИГГСА

Открытие бозона Хиггса $h(125)$ на Большом адронном коллайдере (БАК) коллаборациями ATLAS и CMS в 2012 г. [71] подтверждает механизм Брауты–Энглерта–Хиггса [72] нарушения электрослабой симметрии. Измеренные свойства наблюдаемого бозона Хиггса согласуются с ожиданиями Стандартной модели (SM) в рамках текущей экспериментальной точности, однако смешивания нестандартных скаляров с наблюдаемым массовым состоянием $h(125)$, в том числе нарушающие CP-симметрию, вполне возможны [73, 74]. Наблюдаемые в последнее время на БАК с высокой статистической достоверностью (до 5σ) резонансы при массе 28 ГэВ (в димюонном канале) [75] и 95 ГэВ (в каналах $\gamma\gamma$, $\tau\tau$, bb) [76] могут быть признаками наличия дополнительных скаляров Хиггса.

Несмотря на то, что Стандартная модель (SM) работает чрезвычайно хорошо, есть выходящие за ее рамки проблемы. К ним относятся проблема темной материи во Вселенной, проблема плотности энергии вакуума, проблема калибровочных иерархий, природа механизмов генерации барионной асимметрии, механизмов генерации масс нейтрино, проблема CP в сильных взаимодействиях и другие, что заставляет рассматривать SM как эффективную теорию при низких энергиях. Калибровочная модель на мультитэвных масштабах будет включать новые поля и демонстрировать новые симметрии, в том числе для расширенного сектора Хиггса с дополнительными мультиплетными скалярами. В простейшем расширении SM сектор Хиггса включает в себя два $SU(2)$ дублета Φ_1 и Φ_2 (двухдублетная модель, 2HDM) с потенциалом вида

$$U = -\mu_1^2(\Phi_1^\dagger\Phi_1) - \mu_2^2(\Phi_2^\dagger\Phi_2) - [\mu_{12}^2(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + h.c.] + \lambda_1(\Phi_1^\dagger\Phi_1)^2 + \lambda_2(\Phi_2^\dagger\Phi_2)^2 + \lambda_3(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_2) + \lambda_4(\Phi_1^\dagger\Phi_2)(\Phi_2^\dagger\Phi_1) + [\lambda_5/2(\Phi_1^\dagger\Phi_2)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \lambda_6(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \lambda_7(\Phi_2^\dagger\Phi_2)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + h.c.], \quad (2)$$

что в массовом базисе приводит к пяти физическим состояниям бозонов Хиггса, два из которых заряжены $H^\pm$, а три состояния нейтральны, при сохранении CP-четности хиггсовского потенциала (модель CPС) — это CP-четные состояния h и H и CP-нечетное состояние A ; в модели с CP-нарушением (модель CPV) потенциала Хиггса [77] это h_1, h_2, h_3 состояния с неопределенной CP-четностью. В работе [78] рассматривалось расширение потенциала (2) тринадцатью эффективными операторами размерности шесть вида $\kappa_i(\Phi_a^\dagger\Phi_b)^3$, $\kappa_i(\Phi_a^\dagger\Phi_b)^2(\Phi_c^\dagger\Phi_d)$, ...,

$i = 1, \dots, 13$.

В любой теории, выходящей за рамки SM (далее — модели BSM, beyond SM), свойства наблюдаемого бозона Хиггса (в пределах точности эксперимента) должны удовлетворять предельным условиям настройки [79]

$$m = 125 \text{ ГэВ}, \quad g \equiv y_{\text{BSM}}/y_{\text{SM}} \simeq 1, \quad (3)$$

где m — масса наблюдаемого бозона Хиггса, y_{SM} , y_{BSM} — его связи Юкавы в SM и BSM соответ-

ственно. Отклонения от предсказаний SM в секторе Хиггса могут наблюдаться как в самодействиях скалярных полей, так и взаимодействиях $h(125)$ с кварками и лептонами, также взаимодействиях частиц с CP-нарушением, что будет однозначным свидетельством нестандартного сектора Хиггса¹ (см. [80].)

В последнее время рассматривались два подхода к анализу предела настройки $h(125)$: который может быть достигнут либо наложением дополнительных симметрий [81–83], либо «тонкой настройкой» (fine-tuning) модели [80, 84–88]. Первый подход основан на анализе возможных симметрий, которые приводят к пределу настройки в двухдублетной модели 2HDM. Предполагается, что на некотором масштабе больших масс существует симметрия, которая естественным образом обеспечивает настройку (универсализацию) взаимодействий бозона Хиггса с частицами SM (Natural SM-Higgs Alignment, NHAL). В [82] было показано, что для CP-сохраняющего предела возможны три типа симметрий, которые гарантируют NHAL без отщепления состояний скаляров большой массы (простейшая симметрия такого рода — $SO(5)$, соответствующая модель известна как максимально симметричная модель двух дублетов Хиггса, Maximally Symmetric Two Higgs Doublet Model, MS-2HDM). В случае нарушения CP количество симметрий увеличивается [89]. На меньшем масштабе энергий симметрия слегка нарушается и в низкоэнергетическом спектре Хиггса будет наблюдаться некоторое отклонение от предела настройки в результате эффектов ренормгруппы, обусловленных константой связи гиперзаряда g' и константы связи Юкавы третьего поколения [82]. Во втором подходе природа предела настройки не рассматривается; вместо этого предполагается, что на масштабе электрослабого масштаба предел настройки точно или приблизительно выполнен, что представляет собой пример тонкой настройки (effective fine-tuning). Описанный ниже анализ проведен в рамках второго подхода.

Наиболее известным расширением хиггсовского сектора SM является суперсимметричное (SUSY) расширение 2HDM типа II, составная часть минимальной суперсимметричной стандартной модели (Minimal Supersymmetric Standard Model, MSSM) [90], в которой каждая частица SM связана с ее суперпартнером. Поскольку никаких сигналов суперпартнеров в настоящее время не наблюдается, предполагаем, что все суперпартнеры SUSY тяжелые, поэтому феноменология бозона Хиггса на малых масштабах очень похожа на феноменологию 2HDM типа II. Текущие экспериментальные ограничения на массы частиц MSSM и нейтральных бозонов Хиггса MSSM составляют $M_{\text{SUSY}} > 2,3 \text{ ТэВ}$

и $m_{H,A} > 1121 \text{ ГэВ}$ для $\tan\beta = 10$ (и больше для $\tan\beta > 10$) [74]. Предел массы для $m_{H^\pm} < m_{\text{top}}$ составляет $m_{H^\pm} > 155 \text{ ГэВ}$, в случае $m_{H^\pm} > m_{\text{top}}$ это $m_{H^\pm} > 181 \text{ ГэВ}$ для $\tan\beta = 10$ (и больше для $\tan\beta > 10$) [74].

В ряде статей авторов рассматривался сектор Хиггса 2HDM типа II и его частный случай — MSSM с явным нарушением CP-инвариантности хиггсовского потенциала, анализировался предел настройки в наиболее общем случае, когда наблюдаемый бозон Хиггса $h(125)$ является нейтральным скаляром с неопределенной CP-четностью h_1 , или (для упорядочения «123» по массам), h_2 или h_3 . В этих рамках рассматривалась возможность интерпретации димюонного сигнала на 28 ГэВ [91, 92]. Возможности интерпретации дифотонного сигнала на 95 ГэВ см. также [88, 93, 94], вместе с тем [95]). Предлагаемые базовые параметрические сценарии имеют ряд феноменологических особенностей, имеющих отношение к будущим исследованиям на БАК.

В рамках основного сценария, который рассматривается ниже, эффективной теорией поля на электрослабом масштабе является 2HDM, поэтому масштаб массы M_A имеет порядок m_{top} и на порядки меньше масштаба параметра массы суперполя Хиггса μ и масштаба массы суперпартнеров M_S , последние отличаются незначительно. В литературе рассматривались и другие интересные сценарии, например расположение M_A между m_{top} и (M_S, μ) , когда эффективная теория выше M_A — это 2HDM, ниже M_A — стандартная модель [96, 97]. Эффекты новой физики, в том числе связанные с явным нарушением CP, не связаны с сектором легких бозонов Хиггса, поэтому эти интересные случаи демонстрируют иную феноменологию тяжелых бозонов Хиггса.

Для модели с двумя дублетами скалярных полей и явным CP-нарушением хиггсовского потенциала построены эффективные потенциалы типа Коулмана–Вайнберга и улучшенные с помощью уравнений ренормализационной группы (RG) потенциалы Хиггса, которые анализируются в рамках разложения эффективных потенциалов до операторов размерности шесть с учетом пороговых (threshold) поправок для RG MSSM, индуцированных операторами размерности шесть. В результате показано, что сдвиги массы легкого нейтрального скаляра Хиггса h пренебрежимо малы при стабильных значениях $A_{t,b}/M_{\text{SUSY}} \leq 3$, $\mu/M_{\text{SUSY}} \leq 3$ и составляют около 10 ГэВ при $m_A \sim M_{\text{EW}}$ или незначительно при $m_A \sim M_{\text{SUSY}}$ для нестабильных значений $A_{t,b}/M_{\text{SUSY}} > 3$, $\mu/M_{\text{SUSY}} > 3$.

В итоге исследований упомянутых выше моделей хиггсовского сектора для общей (несуперсимметричной) 2HDM типа II были получены предельные условия настройки состояния $h(125)$, справедливые в рамках разложения эффективного потенциала до операторов размерности шесть для нейтральных бозонов Хиггса с неопределенной CP-четностью h_1, h_2 или h_3 . Численные исследования

¹ Эффекты CP-нарушающих взаимодействий SM-бозона Хиггса из-за СКМ-матрицы настолько малы, что их наблюдения находятся за пределами экспериментальных возможностей.

Таблица. Параметрические сценарии, удовлетворяющие условиям настройки h_1^I ($\beta - \alpha \simeq \pi/2$, $c_1 \simeq 0$) для углов смешивания в хиггсовском секторе и зависящие от углов смешивания и мнимых частей параметров потенциала λ_i, κ_j ($i=5,6,7$, $j=7,\dots,13$) параметра c_1 (см. явное выражение в [78]) в пределах точности $m_{h_1} = 125 \pm 2$ ГэВ и $|c_1|$ меньше 0.1 или 0.01

BS	$\tan \beta$	M_{SUSY} , ТэВ	A , ТэВ	μ , ТэВ	$m_{H^\pm}$, ТэВ	$ c_1 $ (точность)	a_{33} (предсказание)
BS1	5	2.5	5.5	1	varied (≥ 1)	≤ 0.01	0.008
BS2	10	2.5	5.5	3	varied (≥ 3)	≤ 0.01	0.288
BS3	10	5	10	varied (1 – 10)	varied	≤ 0.01	0.026
				1	≥ 1		
				10	≥ 4		
BS4	20	10	28	12	varied (≥ 3)		0.336
					3	≤ 0.1	
					10	≤ 0.01	

в рамках MSSM показывают, что имеет место только предел настройки для состояния h_1^I . При любом параметре $\tan \beta$ дополнительные бозоны Хиггса быстро распадаются и имеют массу более 1 ТэВ. Возможность существования нейтрального скаляра Хиггса с массой 95 ГэВ в рамках рассматриваемых сценариев исключена. Для изучения основных феноменологических особенностей, имеющих значение для будущих поисков на коллайдере, были предложены четыре дополнительных контрольных сценария. Два из них предсказывают экспериментально различимые CP-нарушающие взаимодействия бозона Хиггса h_3 с «верхними» компонентами фермионных мультиплетов.

Результаты получены в общем базисе для потенциала 2HDM типа II. CP-нарушающий предел 2HDM также был проанализирован в [88], где были получены условия настройки для состояния h_1 в базисе Хиггса. Независимые от базиса методы, разработанные для 2HDM в [98], позволяют в принципе построить явные представления для связей и углов смешивания в базисе массовых состояний в терминах инвариантов 2HDM (величин, инвариантных при унитарных преобразованиях двух дублетов Хиггса в потенциале) также для расширенного потенциала Хиггса.

8. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОГОПЕТЛЕВЫХ ФЕЙНМАНОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Большую ценность для приложений в физике частиц представляют новые методы аналитических вычислений для многопетлевых фейнмановских диаграмм. Фейнмановские интегралы по петлевым импульсам представляют собой фундаментальные величины при построении квантово-полевых амплитуд в рамках теории возмущений. Они естественно возникают в теоретических расчётах

в физике элементарных частиц. Фейнмановские интегралы представляют собой сложные математические объекты, а задача их вычисления требует привлечения методов из разделов современной математики, а также созданию эффективных компьютерных кодов, помогающих при вычислении. Описание наиболее эффективных методов вычисления фейнмановских интегралов можно найти в книге [99], опубликованной в 2012 году. Приходится констатировать, что книга уже успела устареть, так как после ее публикации были развиты новые эффективные методы и усовершенствованы некоторые старые методы.

Одним из классических подходов к вычислению интегралов Фейнмана является так называемая редукция к мастер-интегралам, то есть выражение большинства требуемых в конкретной физической задаче интегралов через минимальное количество простейших. Редукция основана на использовании соотношений интегрирования по частям [100], связывающих интегралы, относящиеся к одной задаче, но имеющие различные *индексы* (целочисленные параметры). Эти базисные интегралы называются *мастер-интегралами*. Для выражения заданных фейнмановских интегралов через соответствующие мастер-интегралы можно применять публичные компьютерные программы, среди которых выделяются FIRE, Reduze и Kira как наиболее эффективные и наиболее часто используемые.

В качестве одного из наиболее ярких примеров в этой области можно привести аналитическое вычисление мастер-интегралов для четырехпетлевых форм-факторов. Они выражаются через безмассовые диаграммы с тремя концами, два из которых находятся на световом конусе, т.е. $p_1^2 = p_2^2 = 0$. Каждый из таких интегралов пропорционален некоторой (известной) степени $q^2 = -(p_1 + p_2)^2$ с коэффициентом, представляющим собой линейную комбинацию $\sum_{i=-8}^0 c_i \epsilon^i$ степеней параметра размерностной регуляризации $\epsilon = (4-d)/2$. Фейнмановские интегралы для четырехпетлевых формфакторов пред-

ставляются в виде

$$I_{\nu_1, \dots, \nu_{18}} = \frac{\Gamma^4(d/2 - 1)}{\pi^{2d}} \int \frac{1}{D_1^{\nu_1} \dots D_{18}^{\nu_{18}}} \prod_{l=1}^4 d^d k_l, \quad (4)$$

где D_i — пропагаторы (или числители интегралов) в некоторый целых степенях ν_i (индексах), а $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ — петлевые импульсы. Первые 12 индексов могут быть положительными, а остальные не положительны. Вот типичные выражения для пропагаторов:

$$\begin{aligned} D_1 &= k_1^2, \quad D_2 = (k_1 + p_1 + p_2)^2, \\ D_3 &= (k_1 + k_2 - k_4 + p_2)^2, \\ D_4 &= (k_1 + k_2 - k_4 + p_1 + p_2)^2, \dots \end{aligned}$$

Аналитические вычисления четырехпетлевых формфакторов начинались двумя группами: (1) Ли и др. [101] и (2) фон Мантойфель и др., которые применяли, соответственно, метод дифференциальных уравнений и метод прямого интегрирования по фейнмановским параметрам. Сначала это происходило в конкуренции, а затем группы объединились и применили эти два метода в рамках сотрудничества. В результате возникла серия работ, где были получены аналитические результаты для всех мастер-интегралов для четырехпетлевых безмассовых трехточечных фейнмановских интегралов с одним концом вне светового конуса. В частности, для четырехпетлевой диаграммы, упоминаемой выше, результат в разложении по ϵ вплоть до ϵ^0 выглядит так:

$$\begin{aligned} & -\frac{25}{576\epsilon^8} + \frac{313\zeta(2)}{288\epsilon^6} + \frac{1241}{216}\zeta(3)\frac{1}{\epsilon^5} - \frac{3671}{720}\zeta(2)^2\frac{1}{\epsilon^4} + \left(\frac{275}{9}\zeta(5) - \frac{7033}{54}\zeta(3)\zeta(2)\right)\frac{1}{\epsilon^3} - \\ & - \left(\frac{210031}{648}\zeta(3)^2 + \frac{9349}{105}\zeta(2)^3\right)\frac{1}{\epsilon^2} + \\ & + \left(\frac{3509717}{2016}\zeta(7) - \frac{366929}{180}\zeta_5\zeta(2) + \frac{284633}{540}\zeta(3)\zeta(2)^2\right)\frac{1}{\epsilon} - \\ & - \frac{10763}{6}\zeta(5,3) - \frac{3150517}{540}\zeta(5)\zeta(3) + \frac{1847833}{324}\zeta(3)^2\zeta(2) + \frac{2984111}{1575}\zeta(2)^4, \end{aligned}$$

где $\zeta(i)$ — дзета-функция Римана, а $\zeta(i, j)$ — её обобщение. Результаты для мастер-интегралов были использованы для вывода четырехпетлевых результатов для наиболее важных формфакторов [101]–[105], в частности для кваркового и глюонного форм-фактора в КХД [104].

Другой хорошо известный пример — аналитическое вычисление четырехпетлевых безмассовых пропагаторных интегралов. Вычисление соответствующих мастер-интегралов описано в работе [106]. Оно использует свойство, заключающееся в равенстве сходящихся фейнмановских интегралов для двух пропагаторных графов при условии совпадения соответствующих вакуумных графов, полученных из пропагаторных графов добавлением линии между внешними вершинами. Соответствующие соотношения записываются для всех пар пропагаторных интегралов, которые удовлетворяют условиям склеивания линией, т.е. интегралов, которые приводят к одной и той же вакуумной диаграмме с нулевой степенью расходимости. Затем все участвующие интегралы редуцируются к мастер-интегралам, а полученные линейные уравнения для коэффициентов при мастер-интегралах решаются для коэффициентов в ϵ -разложениях. В результате этой процедуры (называемой *метод склеивания*) остаётся учесть дополнительную информацию только о нескольких простых мастер-интегралах.

Возможность редукции к мастер-интегралам

и аналитические результаты для них использовались в большом количестве работ. Можно выделить следующие результаты, полученные в течение последних десяти лет. Аналитически вычислены пятипетлевые поправки к различным ренорм-групповым функциям в квантовой хромодинамике, а именно к бета-функции, определяющей эволюцию кварк-глюонной константы связи [107], и к аномальной размерности массы кварка [108]. Исследована трансцендентная структура аномальных размерностей: показано, что вклады, зависящие от π , выражаются через вклады предыдущего (по теории возмущения) порядка [109, 110].

Кроме того, предложен метод исследования соотношений интегрирования по частям для интегралов Фейнмана путем разложения их решений в ряд в пределе большого значения параметра размерностной регуляризации [111]. Идея метода состоит в том, чтобы использовать линейные подстановки объектов рекурсии для преобразования этих соотношений к явно рекурсивному виду. Показана применимость предложенного метода для нескольких семейств вакуумных интегралов с одной массивной линией вплоть до семипетлевого уровня.

Оказалось, что метод склеивания, использованный для вычисления мастер-интегралов для четырехпетлевых безмассовых пропагаторных интегралов [106] и описанный выше, применим и на пятипетлевом уровне [112]. Любой пятипетлевой фейнмановский интеграл из этого класса записывается

ся в виде, аналогичном (4), с некоторым выбором пропагаторов, зависящих от пяти петлевых импульсов k_i и одного внешнего импульса. На этот раз число индексов равно двадцати, а число положительных индексов не превышает пятнадцати. Для вычисления всех мастер-интегралов были выявлены 469 логарифмически расходящихся шестипетлевых вакуумных диаграмм без подрасходимостей. Затем были выведены соотношения склеива-

ния для всех пар пятипетлевых пропагаторных диаграмм, полученных разрезанием одной линии из исходных вакуумных графов. Редукция к мастер-интегралам для всех участвующих интегралов осуществлялась с помощью программы FIRE. Наконец, полученные линейные уравнения для коэффициентов ϵ -разложений вычисляемых мастер-интегралов были решены вплоть до веса девять.

Например, так выглядит типичный результат в ϵ -разложении вплоть до ϵ^0 :

$$\begin{aligned} & \frac{6\zeta(5)}{\epsilon^2} + \left(\frac{174\zeta(3)^2}{5} - 29\zeta(5) - \frac{42\zeta(7)}{5} + \frac{\pi^6}{63} \right) \frac{1}{\epsilon} - 210\zeta(5) - \frac{29\pi^6}{378} - \frac{1261\zeta(3)^2}{5} - \\ & - \frac{1919\zeta(7)}{10} + \frac{29\pi^4\zeta(3)}{25} - 204\zeta(3)\zeta(5) + \frac{2887\pi^8}{78750} - \frac{3888}{25}\zeta(3,5) + \frac{614\zeta(9)}{3} + 48\zeta(3)^3. \end{aligned}$$

Еще один метод вычисления фейнмановских интегралов, который получил дальнейшее развитие, — это метод Меллина–Барнса (см., например, обзор в книге [99]). Для заданного фейнмановского интеграла с данными индексами существуют различные способы вывода этого представления. Представление Меллина–Барнса представляет собой многократный интеграл вдоль мнимой оси, в котором подынтегральное выражение содержит произведение гамма-функций от некоторых аргументов в числителе и знаменателе. Оно представляет собой мощный метод для вычисления фейнмановских интегралов. Однако простота представления существенно зависит от его кратности: крайне желательно выводить представление с минимальным количеством интегрирований.

В работе [113] был развит алгоритм для автоматического вывода оптимального представления Меллина–Барнса и разработан соответствующий публичный компьютерный код **MBcreate** в рамках системы компьютерной алгебры **Mathematica**, который позволяет автоматически выводить многократное представление Меллина–Барнса для заданного параметрического интеграла. Полученный код **MBcreate** дополнил имеющийся пакет программ, связанных с МБ-представлениями, который, в частности, включает хорошо известные коды **MB.m**, **MBresolve.m**, **MBasymptotics.m** и др.

В задаче об изучении поведения судаковского фактора в $N = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса вне массовой оболочки в пределе нулевой массы были использованы [114, 115] несколько методов аналитического вычисления фейнмановских интегралов. В этих работах было продемонстрировано, что вплоть до трёхпетлевого приближения не только инфракрасно расходящиеся, но и конечные вклады экспоненцируются, причём коэффициент при $\log^2(m^2)$ определяется октагонной аномальной размерностью, которая раньше проявлялась в разных аналогичных вычислениях. Такое поведение сильно отличается от предположений, ранее сформулированных в литературе.

Для исследования рассматриваемой асимптотики были использованы два подхода. Первый из них основан на решении дифференциальных уравнений в рамках метода канонических базисов. Хотя в рамках данной задачи нужен только предел $m \rightarrow 0$, этот метод позволяет получить явные аналитические выражения для трехпетлевых вершинных интегралов при произвольных значениях q^2 и m^2 . Основная идея, которая здесь используется, — это построение канонического базиса, т.е. в котором матрицы в дифференциальных уравнениях пропорциональны параметру размерностной регуляризации ϵ , а все сингулярности в этих матрицах оказываются фуксовыми. Стартуя с такого базиса, легко получить решения дифференциальных уравнений в терминах гармонических полилогарифмов. После этого вычисление асимптотики оказывается довольно простой операцией, которая производится с помощью компьютерного кода **HPL**.

Второй использованный подход основан на методе разложения по областям, который был развит в работе [116] (см. также книгу [117]). Это метод представляет собой универсальное средство для исследовании разложений в самых различных пределах. В рамках этого метода разложение данного фейнмановского или параметрического интеграла задаётся суммой по так называемым областям, которые соответствуют граням максимальной размерности многогранника Ньютона, связанного с двумя многочленами Симанзика в параметрическом представлении. При этом был использован публичный компьютерный код **asy.m**, основанный на этой математической картине. Оба подхода привели к тем же самым результатам для фактора, что предоставило дополнительную проверку проведенного вычисления.

Ещё один метод для аналитического вычисления фейнмановских интегралов появился совсем недавно [118]. Он позволяет эффективно разрешать особенности параметрических фейнмановских интегралов по параметру размерностной регуляризации ϵ , чтобы затем проводить разложение в ряд

Лорана при $\epsilon = 0$. На самом деле давно существует процедура, позволяющая это делать: это так называемое секторное разложение. Она представляет собой стандартное средство для численного вычисления фейнмановских интегралов и используется практически в любом компьютерном коде, для этого предназначенном. Однако для аналитического вычисления эта процедура не годится, поскольку она существенно нарушает аналитическую структуру заданного интеграла, так что во вкладах секторов появляется сложная аналитическая зависимость, которая в интеграле реально отсутствует.

Метод разрешения особенностей, предложенный в работе [118], основан на тропической геометрии. Особенности подынтегрального выражения для заданного фейнмановского интеграла, записанного в соответствующем параметрическом представлении, характеризуются с использованием многочлена Ньютона, построенного для многочленов Симанзика, появляющихся в представлении. Сингулярности параметрического интеграла описываются на геометрическом языке. Затем они разрешаются с помощью некоторых вычитаний, соответствующих лучам дуального конуса. В результате исходный параметрический интеграл записывается в виде линейной комбинации интегралов, в каждом из которых можно проводить разложение по ϵ под знаком интеграла. В работе [119] была вычислена ведущая часть в разложении пятиточечного двухпетлевого фейнмановского интеграла в безмассовом пределе методом разложения по областям [116]. Здесь метод, основанный на тропической геометрии, успешно применялся для аналитического вычисления вкладов соответствующих областей.

9. РЕШЕТОЧНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ КТП И ТОЧНЫЕ КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

Решеточная квантовая теория поля использует стандартные конечные разности вместо производных целого порядка. При этом непрерывное пространство-время заменяется решеткой для численного решения уравнений квантовой теории поля. Это позволяет дискретизировать уравнения, аппроксимируя производные целого порядка стандартными конечными разностями, и решать их на компьютере. При этом хорошо известно, что алгебраические свойства производных целого порядка и стандартных конечных разностей не совпадают. Например, правило дифференцирования произведения (правило Лейбница) не выполняется для стандартных конечных разностей, конечная разность синуса не равна косинусу и так далее. Это приводит к тому, что поведения системы и его дискретного аналога не совпадают, поскольку решения уравнений движения этих систем различаются (например, см. табл. 1 и 2 в статье [120], с. 55). Более того, в непрерывном пределе решение (например, дискретного линейного и нелинейного волновых уравнений) может не переходить в решение

дифференциального уравнения [121] (например, см. Параграф 8, Предельный переход уравнений колебаний кристаллической решетки в волновое уравнение, с. 53–93).

Для устранения этих недостатков в математике были предложены нестандартные конечные разности Миккенса [122–127]. Однако такие конечные разности зависят от вида уравнения, параметров уравнения и не образуют исчисления. Недавно в работах [120, 128–133] были предложены точные конечные разности, алгебраические свойства которых совпадают со свойствами производных целого порядка, и их обобщения на случай производных нецелого порядка.

Для построения нелокальных квантовых теорий поля с нелокальностью степенного типа можно использовать производные и интегралы нецелого порядка. При этом возникает вопрос о дискретизации таких теорий для формулировки решеточных нелокальных КТП.

Отметим, что уравнения с производными и интегралами нецелых порядков [134, 135] широко применяются в разных областях физики [136–138] и являются мощным инструментом для описания динамики систем и процессов с нелокальностью в пространстве и времени. Например, в квантовой физике производные нецелого порядка активно используются в нелокальной квантовой механике [139–142], квантовой теории открытых систем [143–146], в немарковской квантовой теории [147–149], в теоремах Нетер для нелокальной теории поля [150]. КТП и гравитации [151, 152], квантовой теории поля при положительной температуре [153, 154], и могут применяться для регуляризации в КТП [155]. Производные нецелого порядка позволяют учитывать нелокальность степенного типа в физике.

Операторы Лапласа и Даламбера нецелого порядка являются основой построения нелокальной теории поля в многомерных пространствах. Впервые операторы Лапласа и Даламбера дробного порядка были предложены Рисом в [156] в 1949 г. Затем нецелые степени даламбертиана рассматривались в различных работах (например, см. раздел 28 в [134] и [157]). Как было доказано в статьях [131, 158, 159], уравнения нелокальной теории поля с производными нецелого порядка типа Рисса могут быть напрямую связаны с решеточными моделями с дальним действием («long-range interaction»). В результате полевые уравнения с производными нецелого порядка фактически являются точными непрерывными аналогами уравнений решеточных моделей с дальним действием.

В квантовой теории поля метод континуальных интегралов очень важен для описания процессов в физике высоких энергий [160]. Континуальные интегралы хорошо определены для систем со счетным числом степеней свободы. В теории поля мы имеем дело со случаем несчетным количеством степеней свободы, описываемых пространственно-временными координатами. Чтобы придать континуальным интегралам точный смысл, мы можем дискретизи-

ровать пространство и время, то есть ввести решетку пространства-времени. Использование решеточного пространства-времени соответствует специальной форме регуляризации континуальных интегралов. В решеточной теории поля интегралы импульсного пространства обрезаются при импульсе порядка обратных констант решетки. Решеточную регуляризацию можно рассматривать как естественное введение обрезания импульса. Эта регуляризация позволяет дать точное определение континуального интеграла, поскольку решётка имеет счётное число степеней свободы. Более того, существование обрезания импульса неудивительно в решеточных теориях поля. В выражении интеграла Фурье для решеточных полей интеграл импульса по компонентам волнового вектора k_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) ограничен зоной Бриллюэна $k_\mu \in [-\pi/a_\mu, \pi/a_\mu]$, где a_μ — постоянные решётки.

В работах [161, 162] была предложена точная дискретизация КТП, основанная на принципе универсальности и принципе алгебраического соответствия. Разности, являющиеся точными дискретизациями производных, должны обладать свойством универсальности, то есть точные конечные разности не должны зависеть от вида дифференциальных уравнений и их параметров. Алгебраическое соответствие означает, что точные конечные разности должны удовлетворять тем же базовым алгебраическим соотношениям, что и дифференциальные операторы. Точный дискретный аналог производных должен обладать теми же основными характеристическими свойствами, что и операторы дифференцирования. В работах [161, 162] предлагается использовать новые разностные операторы, которые можно рассматривать как точную дискретизацию производных целых (и нецелых) порядков. Эти разности не зависят от вида дифференциальных уравнений и их параметров. Используя эти разности, можно получить точную дискретизацию дифференциальных уравнений целых и нецелых порядков. Предлагаемый подход к точной дискретизации позволяет получать разностные уравнения и их решения, в точности соответствующие дифференциальным уравнениям и их решениям. В качестве примера, дискретным аналогом производной первого порядка $\varphi^{(1)}(x)$ является точная конечная разность

первого порядка

$${}^T\Delta^1 \varphi[n] := \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} \varphi[n-m], \quad (5)$$

где сходимостъ подразумевается по Чезаро или Пуассону–Абелю [167, 168]. Подчеркнем, что для оператора (5) выполняется правило Лейбница, являющееся характеристическим свойством производной первого порядка. Отметим, что точные конечные разности целого порядка $n \in \mathbb{N}$ определяются как n -кратное действие точных конечных разностей первого порядка ${}^T\Delta^n := ({}^T\Delta^1)^n$, что не выполняется для нестандартных конечных разностей Миккенса.

Точные конечные разности целого и нецелого порядка были предложены в работах [120, 128–133], а затем применены в квантовой теории [161–166]. В работах [161, 162] была предложена формулировка нелокальной теории поля на решеточном пространстве-времени, основанная на точных конечных разностях нецелого порядка. Предложенную теорию можно рассматривать как решеточный аналог нелокальных теорий поля и как нелокальный аналог решеточных квантовых теорий поля. В работах [161, 162] предложены решеточные аналоги дробно-дифференциальных операторов. Было доказано, что континуальный предел предложенной решеточной теории дает нелокальную теорию поля с непрерывным пространством-временем. Уравнение этой нелокальной теории поля содержат производные типа Рисса нецелых порядков по пространственно-временным координатам.

В решеточной квантовой теории поля обычно рассматривается аналитическое продолжение $x^0 \rightarrow -ix_4$, позволяющее использовать евклидово пространство-время $\mathbb{R}^4$ вместо псевдоевклидова $\mathbb{R}_{1,3}^4$. Точный дискретный аналог N -мерного лапласиана нецелого порядка α в форме Рисса ($N = 4$ для пространства-времени $\mathbb{Z}^4$) может быть записан в виде

$${}^T\Delta_h^{N,\alpha} \varphi[\mathbf{n}] := \sum_{\mathbf{m}} {}^T K_{N,\alpha}(\mathbf{m}) \varphi[\mathbf{n} - \mathbf{m}], \quad (6)$$

где $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N$, и

$${}^T K_{N,\alpha,h}(\mathbf{m}) = \frac{1}{h^\alpha} \frac{\pi^{\alpha+N/2}}{(\alpha+N) 2^{N-1} \Gamma(N/2)} {}_1F_2 \left(\frac{\alpha+N}{2}; \frac{N}{2}, \frac{\alpha+N+2}{2}; -\frac{\pi^2 |\mathbf{m}|^2}{4} \right) \quad (7)$$

при $\alpha > -N$, и ${}_1F_2[a; b, c; z]$ — обобщенная гипергеометрическая функция. Здесь предположили $h_\mu = h$ для всех $\mu = 1, \dots, N$.

Например, для решеточной нелокальной теории поля в пространстве-времени $\mathbb{Z}^4$ выражение континуального интеграла функций Грина имеет вид

$$\langle \varphi_L(\mathbf{n}_1) \dots \varphi_L(\mathbf{n}_s) \rangle = \frac{\int \prod_{j=1}^s d\varphi_L(\mathbf{n}_j) \left(\varphi_L(\mathbf{n}_1) \dots \varphi_L(\mathbf{n}_s) \right) e^{-S_E[\varphi_L, J_L]}}{\int \prod_{i=1}^s d\varphi_L(\mathbf{n}_i) e^{-S_E[\varphi_L, J_L]}}, \quad (8)$$

где действие записывается в виде

$$S_E[\varphi_L, J_L] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \varphi_L(\mathbf{n}) \left(\square_{E,L}^{2\alpha, \pm} + M_L^2 \right) \varphi_L(\mathbf{m}) + \sum_{\mathbf{m}} \varphi_L(\mathbf{m}) J_L(\mathbf{m}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{n_\mu, m_\mu=-\infty}^{+\infty} \varphi_L(\mathbf{n}) P_{n_\mu m_\mu}(2\alpha) \varphi_L(\mathbf{m}) + \sum_{\mathbf{m}} \varphi_L(\mathbf{m}) J_L(\mathbf{m}) \quad (9)$$

с операторным ядром

$$P_{n_\mu m_\mu}(2\alpha) = \frac{1}{a_\mu^{2\alpha}} \frac{\pi^{2\alpha}}{2\alpha+1} {}_1F_2 \left(\frac{2\alpha+1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{2\alpha+3}{2}; -\frac{\pi^2 (n_\mu - m_\mu)^2}{4} \right) + M_L^2 \delta_{n_\mu, m_\mu}. \quad (10)$$

В работах [161, 162] был предложен подход к формулировке решеточных нелокальных теорий поля на неограниченном решеточном пространстве-времени, основанный на точных конечных разностях. Фактически предлагается точная дискретизация дифференциальных и интегральных операторов целых и нецелых порядков. Подчеркнем, что предлагаемые дискретные операторы не зависят от вида дифференциальных уравнений и их параметров, в отличие от нестандартных конечных разностей. Кроме того, характерной особенностью предлагаемых точных конечных разностей является выполнение тех же алгебраических

свойств, которыми обладают дифференциальные операторы. Континуальный предел предлагаемой решеточной теории поля дает нелокальную теорию поля для непрерывного пространства-времени. Полевые уравнения с операторами нецелых порядков, которые выводятся из уравнений для решеточного пространства-времени с дальностью действия, содержат производные типа Рисса нецелых порядков по координатам пространства-времени.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

- [1] Boos E.E., Kubyshin Y.A., Smolyakov M.N., Volobuev I.P. // *Class. Quant. Grav.* **19**. 4591 (2002).
- [2] Боос Э.Э., Волобуев И.П., Кубышин Ю.А., Смоляков М.Н. // *ТМФ* **131**, № 2. 216 (2002). (Boos E.E., Volobuev I.P., Kubyshin Y.A., Smolyakov M.N. // *Theor. Math. Phys.* **131**. 629 (2002)).
- [3] Boos E.E., Mikhailov Y.S., Smolyakov M.N., Volobuev I.P. // *Nucl. Phys. B* **717**. 19 (2005).
- [4] Boos E.E., Mikhailov Y.S., Smolyakov M.N., Volobuev I.P. // *Mod. Phys. Lett. A* **21**. 1431 (2006).
- [5] Boos E.E., Bunichev V.E., Smolyakov M.N., Volobuev I.P. // *Phys. Rev. D* **79**. 104013 (2009). arXiv:0710.3100 [hep-ph].
- [6] Боос Э.Э., Волобуев И.П., Перфилов М.А., Смоляков М.Н. // *ТМФ* **170**, № 1. 110 (2012). (Boos E.E., Volobuev I.P., Perfilov M.A., Smolyakov M.N. // *Theor. Math. Phys.* **170**. 90 (2012)).
- [7] Boos E.E., Bunichev V.E., Perfilov M.A. et al. // *JHEP* **06**. 160 (2014).
- [8] Boos E.E., Bunichev V.E., Perfilov M.A. et al. // *Phys. Rev. D* **92**, N 9. 095010 (2015).
- [9] Boos E., Keizerov S., Rakhmetov E., Svirina K. // *Phys. Rev. D* **94**, N 2. 024047 (2016).
- [10] Боос Э.Э., Буничев В.Е., Волобуев И.П. // *ЖЭТФ* **151**, № 5. 850 (2017). (Boos E.E., Bunichev V.E., Volobuev I.P. // *J. Exp. Theor. Phys.* **124**, N 5. 722 (2017)).
- [11] Волобуев И.П., Кейзеров С.И., Рахметов Э.Р. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* **79**, № 2. 2420103 (2024). (Volobuev I.P., Keizerov S.I., Rakhmetov E.R. // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **79**, N 2. 156 (2024)).
- [12] Boos E.E., Bunichev V.E., Volobuev I.P., Smolyakov M.N. // *Phys. Part. Nucl.* **43**. 42 (2012).
- [13] Боос Э.Э., Буничев В.Е., Волобуев И.П. и др. // *УФН* **195**, № 2. 116 (2025). Boos E.E., Bunichev V.E., Volobuev I.P. et al. // *Phys. Usp.* **68**. 111 (2025).
- [14] Volobuev I.P. // *Int. J. Mod. Phys. A* **33**, N 13. 1850075 (2018).
- [15] Egorov V.O., Volobuev I.P. // *Phys. Rev. D* **97**, N 9. 093002 (2018).
- [16] Волобуев И.П., Егоров В.О. // *ЖЭТФ* **155**, № 5. 839 (2019). (Volobuev I.P., Egorov V.O. // *J. Exp. Theor. Phys.* **128**, N 5. 713 (2019)).
- [17] Волобуев И.П., Егоров В.О. // *ТМФ* **199**, № 1. 104 (2019). Volobuev I.P., Egorov V.O. // *Theor. Math. Phys.* **199**. 562 (2019).
- [18] Egorov V.O., Volobuev I.P. // *Phys. Rev. D* **100**, N 3. 033004 (2019).
- [19] Егоров В.О., Волобуев И.П. // *ЖЭТФ* **162**, № 2. 226 (2022). Egorov V., Volobuev I. // *J. Exp. Theor. Phys.* **135**, N 2. 197 (2022).
- [20] Acero M.A. et al. // *J. Phys. G* **51**, N 12. 120501 (2024).
- [21] Antonov E., Drutskoy A., Dubinin M. // *JETP Lett.* **118**, N 7. 461 (2023).
- [22] Dubinin M.N., Kazarkin D.M. // *J. Exp. Theor. Phys.* **137**, N 6. 814 (2023).
- [23] Casas J.A., Ibarra A. // *Nucl. Phys. B* **618**. 171 (2001).
- [24] Dubinin M., Fedotova E. // *Symmetry* **15**, N 3. 679 (2023).
- [25] Dubinin M.N., Kazarkin D.M. // *Phys. Rev. D* **109**, N 5. 055004 (2024).

- [26] Dubinin M.N., Fedotova E.Yu., Kazarkin D.M. // *Phys. Part. Nucl. Lett.* **22**, N 5. 966 (2025).
- [27] Dubinin M.N., Fedotova E.Yu., Kazarkin D.M. // *Phys. Part. Nucl.* **56**, N 3. 871 (2025).
- [28] Belanger G., Mjallal A., Pukhov A. *Phys. Rev. D* **105** N 3, 035018 (2022).
Belanger G., Boudjema F., Pukhov A., Semenov A. *Comput. Phys. Commun.* **185** 960 (2014).
Belanger G., Boudjema F., Brun P. et al. *Comput. Phys. Commun.* **182** 842 (2011).
Belanger G., Boudjema F., Pukhov A., Semenov A. *Comput. Phys. Commun.* **176** 367 (2007).
- [29] Bélanger G., Boudjema F., Goudelis A. et al. *Comput. Phys. Commun.* **231** 173 (2018).
- [30] Gelmini G.B., Gondolo P., Roulet E. *Nucl. Phys. B* **351** 623 (1991).
- [31] Egorov V., Smolyakov M., Volobuev I. // *Phys. Rev. D* **107**, N 2. 025001 (2023).
- [32] Egorov V., Smolyakov M., Volobuev I. // *Class. Quant. Grav.* **41**, N 4. 045002 (2024).
- [33] Волобуев И.П., Егоров В.О., Смоляков М.Н. // *ТМФ* **225**, № 3. 591 (2025).
(Egorov V., Smolyakov M., Volobuev I. // *Theor. Math. Phys.* **225**, N 3. 2203 (2025)).
- [34] Keizerov S.I., Rakhmetov E.R., Smolyakov M.N., Volobuev I.P. // *Phys. Part. Nucl.* **56**, N 2. 162 (2025).
- [35] Starobinsky A.A. // *Phys. Lett. B* **91** 99 (1980).
- [36] Guth A.H. // *Phys. Rev. D* **23** 347 (1981).
- [37] Mukhanov V.F., Chibisov G.V. // *JETP Lett.* **33** 532 (1981).
- [38] Linde A.D. // *Phys. Lett. B* **108** 389 (1982).
- [39] Ellis J.R., Nanopoulos D.V., Olive K.A., Tamvakis K. // *Nucl. Phys. B* **221** 524 (1983).
- [40] Linde A.D. // *Phys. Lett. B* **129** 177 (1983).
- [41] Ovrut B.A., Steinhardt P.J. // *Phys. Lett. B* **147** 263 (1984).
- [42] Spokoiny B.L. // *Phys. Lett. B* **147** 39 (1984).
- [43] Planck Collaboration, Akrami Y. et al. // Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.* **641** A10 (2020).
- [44] BICEP, Keck Collaboration, Ade P.A.R. et al. // *Phys. Rev. Lett.* **127** N 15, 151301 (2021).
- [45] Atacama Cosmology Telescope Collaboration, Louis T. et al. // *JCAP* **11** (2025) 062,
- [46] Atacama Cosmology Telescope Collaboration, Calabrese E. et al. // *JCAP* **11** 063 (2025).
- [47] Kallosh R., Linde A. // *Gen. Rel. Grav.* **57** N 10, 135(2025).
- [48] Ivanov V.R., Ketov S.V., Pozdeeva E.O., Vernov S.Yu. // *JCAP* **03** N 03, 058 (2022).
- [49] Pozdeeva E.O., Vernov S.Yu. // *Phys. Scripta* **98** N 5, 055001 (2023).
- [50] Pozdeeva E.O., Skugoreva M.A., Toporensky A.V., Vernov S.Yu. // *JCAP* **05** 081 (2025).
- [51] Bezrukov F.L., Shaposhnikov M. // *Phys. Lett. B* **659** 703 (2008).
- [52] Ketov S.V., Pozdeeva E.O., Vernov S.Yu. // *JCAP* **12** 040 (2025).
- [53] Pozdeeva E.O., Gangopadhyay M.R., Sami M. et al. // *Phys. Rev. D* **102** N 4, 043525 (2020).
- [54] Pozdeeva E.O. // *Eur. Phys. J. C* **80** N 7, 612 (2020).
- [55] Pozdeeva E.O. // *Universe* **7** 181 (2021).
- [56] Pozdeeva E.O., Vernov S.Yu. // *Eur. Phys. J. C* **81** 633 (2021).
- [57] Pozdeeva E.O. // *Eur. Phys. J. C* **85** 217 (2025).
- [58] Pozdeeva E.O., Skugoreva M.A., Toporensky A.V., Vernov S.Yu. // *JCAP* **09** 050 (2024).
- [59] Ketov S.V. *Universe* **8** 351 (2022).
- [60] Ketov S.V., Pozdeeva E.O., Vernov S.Yu. // *JCAP* **12** 032 (2022).
- [61] Carr B., Kuhnel F. // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **70** 355 (2020).
- [62] Özsoy O., Tasinato G. // *Universe* **9** 203 (2023).
- [63] Долгов А.Д. // *УФН*, 188:2 121 (2018).
(Dolgov A.D. // *Usp. Fiz. Nauk* **61** N 2, 115 (2018)).
- [64] Ketov S.V. // *Universe* **7** 115 (2021).
- [65] Braglia M., Linde A., Kallosh R., Finelli F. // *JCAP* **04** 033 (2023),
- [66] Dubinin M.N., Petrova E.Yu., Pozdeeva E.O. et al. // *JHEP* **12** 036 (2017). (arXiv:1705.09624 [hep-ph]).
- [67] Dubinin M.N., Petrova E.Yu., Pozdeeva E.O., Vernov S.Yu. // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **15** 1840001 (2018).
- [68] Поздеева Е.О., Вернов С.Ю. // *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, **56**, N 2, 888 (2025).
(Pozdeeva E.O., Vernov S.Yu. // *Phys. Part. Nucl.* **56**, N 2. 542 (2025)).
- [69] Pozdeeva E.O., Vernov S.Yu. // Moscow University Physics Bulletin, to be published. (arXiv:2509.21220 [gr-qc]).
- [70] Chervon S.V., Fomin I.V., Pozdeeva E.O. et al. // *Phys. Rev. D* **100** N 6, 063522 (2019)/
- [71] ATLAS Collaboration (Aad G.) et al. // *Phys. Lett. B* **716**. 1 (2012); CMS Collaboration (Chatrchyan S.) et al. // *Phys. Lett. B* **716**. 30 (2012).
- [72] Englert F., Brout R. // *Phys. Rev. Lett.* **13**. 321 (1964); Higgs P. W. // *Phys. Lett.* **12**. 132 (1964).
- [73] Accomando E. et al. // Workshop on CP Studies and Non-Standard Higgs Physics. Ed. by S. Kraml, G. Azuelos, D. Dominici et al. CERN report 2006-009, arXiv:hep-ph/0608079.
- [74] Particle Data Group (Navas S.) et al. // *Phys. Rev. D* **110**. 030001 (2024).
- [75] CMS Collaboration (Sirunyan A.M.) et al. // *JHEP* **11** 161 (2018); CMS Collaboration (Sirunyan A.M.) et al. // *JHEP* **11** 010 (2017).
- [76] CMS Collaboration (Hayrapetyan A.) et al. // *Phys. Lett. B* **860**. 139067 (2025); ATLAS Collaboration // ATLAS-CONF-2023-035; CMS Collaboration (Tumasyan A.) et al. // *JHEP* **07**. 073 (2023); LEP Working Group for Higgs boson searches, ALEPH, DELPHI, L3, OPAL Collab. (Barate R.) et al. // *Phys. Lett. B* **565**. 61 (2003).
- [77] Akhmetzyanova E., Dolgoplov M., Dubinin M. // *Phys. Rev. D* **71** 075008 (2005).
Dubinin M.N., Semenov A.V. // *Eur. Phys. J. C* **28** 223 (2003).
Akhmetzyanova E., Dolgoplov M., Dubinin M. // *Phys. Part. Nucl.* **37** 677 (2006).
- [78] Dubinin M.N., Petrova E. Yu. // *Phys. Rev. D* **95**. 055021 (2017).
- [79] Carena M. et al. // *Phys. Rev. D* **91**. 035003 (2015); Asner D. et al. // arXiv:1310.0763 [hep-ph].
- [80] Haber H.E., Keus V., Santos R. // *Phys. Rev. D* **106**, N 9. 095038 (2022).
- [81] Pilaftsis A. // *Phys. Rev. D* **93**. 075012 (2016).
- [82] Dev P.S.B., Pilaftsis A. // *JHEP* **12**. 024 (2014); [(Erratum: JHEP **11**. 147 (2015))].
- [83] Darvishi N., Pilaftsis A. // *Phys. Rev. D* **101**. 095008 (2020).
- [84] Chankowski P.H., Farris T., Grzadkowski B. et al. // *Phys. Lett. B* **496**. 195 (2000).
- [85] Gunion J.F., Haber H.E. // *Phys. Rev. D* **67**. 075019

- (2003).
- [86] Ginzburg I.F., Krawczyk M. // *Phys. Rev. D* **72**. 115013 (2005).
- [87] Carena M., Low I., Shah N.R., Wagner C.E.M. // *JHEP* **04**. 015 (2014).
- [88] Banik S., Coloretti G., Crivellin A., Haber H.E. // *Phys. Rev. D* **111**, N 7. 075021 (2025).
- [89] Darvishi N., Pilaftsis A., Yu J.-H. // *JHEP* **05**. 233 (2024).
- [90] Haber H., Kane G. // *Phys. Rept.* **117**. 75 (1985).
- [91] Dubinin M.N., Petrova E.Yu. // *Int. J. Mod. Phys. A* **33**. 1850150 (2018).
- [92] Dubinin M.N., Fedotova E.Yu. // *JETP* **131**, N 6. 917 (2020).
- [93] Liu C.-X., Zhou Y., Zheng X.-Y. et al. // *Phys. Rev. D* **109**, N 5, 056001 (2024).
- [94] Mondal T., Moretti S., Sanyal P. // *Phys. Lett. B* **872**. 140041 (2026).
- [95] Janot P. // *JHEP* **10**. 223 (2024).
- [96] Lee G., Wagner C.E.M. // *Phys. Rev. D* **92**. 075032 (2015).
- [97] Carena M., Ellis J., Lee J.S. et al. // *JHEP*. **02**. 123 (2016).
- [98] Davidson S., Haber H. // *Phys. Rev. D* **72**. 035004 (2005); Erratum: *Phys. Rev. D* **72**. 099902 (2005).
- [99] Smirnov V.A. // *Springer Tracts Mod. Phys.* **250** (2012) 1-296.
- [100] Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. // *Nucl. Phys. B*. **192**. 159 (1981).
- [101] Lee R.N., Smirnov A.V., Smirnov V.A., Steinhäuser M. // *JHEP*. **02**. 172 (2019).
- [102] Lee R.N., Schabinger R.M., Smirnov V.A. et al. // *Phys. Rev. D*. **104**. 074008 (2021).
- [103] Lee R.N., Schabinger R.M., Smirnov V.A. et al. // *JHEP*. **01**. 091 (2022).
- [104] Lee R.N., Schabinger R.M., Smirnov V.A. et al. // *Phys. Rev. Lett.* **128**. 212002 (2022).
- [105] Lee R.N., Schabinger R.M., Smirnov V.A. et al. // *Eur. Phys. J. C*. **83**. 1041 (2023).
- [106] Baikov P.A., Chetyrkin K.G. // *Nucl. Phys. B*. **837**. 186 (2010).
- [107] Baikov P.A., Chetyrkin K.G., Kühn J.H. *Phys. Rev. Lett.* **118**. 082002 (2017).
- [108] Baikov P.A., K.G. Chetyrkin, Kühn J.H. // *JHEP*. **04**. 119 (2017).
- [109] Baikov P.A., Chetyrkin K.G. // *JHEP*. **06**. 141 (2018).
- [110] Baikov P.A., Chetyrkin K.G. // *JHEP*. **10**. 190 (2019).
- [111] Baikov P.A. // *JHEP*. **11**. 016 (2024).
- [112] Georgoudis A., Gonçalves V., Smirnov V.A. et al. // *JHEP*. **09**. 098 (2021).
- [113] Belitsky A.V., Smirnov A.V., Smirnov V.A. // *Nucl. Phys. B*. **986**. 116067 (2023).
- [114] Belitsky A.V., Bork L.V., Pikelner A.F., Smirnov V.A. // *Phys. Rev. Lett.* **130**. 091605 (2023).
- [115] A.V. Belitsky, Bork L.V., Smirnov V.A. // *JHEP*. **11**. 111 (2023).
- [116] Beneke M., Smirnov V.A. // *Nucl. Phys. B*. **522**. 321 (1998).
- [117] Smirnov V.A. Applied asymptotic expansions in momenta and masses. *Springer Tracts Mod. Phys.* **177** (2002), 1-262.
- [118] Salvatori G. The Tropical Geometry of Subtraction Schemes. arXiv:2406.14606 [hep-th].
- [119] Belitsky A.V., Smirnov V.A., Tropical regions of near mass-shell pentabox. arXiv:2508.14298 [hep-th].
- [120] Tarasov V.E. // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Sim.* **37**, 31. (2016).
- [121] Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [122] Mickens R.E. // *Math. Comp. Modelling*. **11**, 528 (1988).
- [123] Mickens R.E. // *J. Comp. Appl. Math.* **110**, N 1. 181 (1999).
- [124] Mickens R.E. // *J. Diff. Eq. Appl.* **8**, 823 (2002).
- [125] Mickens R.E. *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*. Singapore: World Scientific, 1994.
- [126] Mickens R.E. *Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*. Singapore: World Scientific, 2000.
- [127] Mickens R.E. *Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*. Singapore: World Scientific, 2005.
- [128] Tarasov V.E. // *J. Math.* **2015**, 134842 (2015).
- [129] Tarasov V.E. // *Frac. Calc. Appl. Anal.* **19**, N 3. 625 (2016).
- [130] Tarasov V.E. // *Appl. Math. and Comp.* **257**, 12 (2015).
- [131] Tarasov V.E. // *J. Phys. A*. **47**, N 35. 355204 (2014).
- [132] Tarasov V.E. // *Comp. Math. Appl.* **73**, N 5. 855 (2017).
- [133] Tarasov V.E. // *Mathematics*. **12**, N 7. 972 (2024).
- [134] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications*. New York: Gordon and Breach, 1993.
- [135] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [136] *Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 4. Application in Physics. Part A*. Berlin, Boston: Walter de Gruyter, 2019.
- [137] *Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 5. Application in Physics. Part B*. Berlin, Boston: Walter de Gruyter, 2019.
- [138] Tarasov V.E. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. New York: Springer, 2010.
- [139] Laskin N. // *Phys. Lett. A*. **268**, 298 (2000).
- [140] Laskin N. // *Phys. Rev. E*. **62**, 3135 (2000).
- [141] Laskin N. // *Phys. Rev. E*. **66**, 056108 (2002).
- [142] Laskin N. *Fractional Quantum Mechanics*. Singapore: World Scientific, 2018.
- [143] Tarasov V.E. // *Phys. Lett. A*. **372**, N 17. 2984 (2008).
- [144] Тарасов В.Е. // *Теор. Мат. Физ.* **158**, N 2. 214 (2009). (Tarasov V.E. // *Theor. Math. Phys.* **158**, N 2. 179 (2009).)
- [145] Tarasov V.E. *Fractional Dynamics. Recent Advances*. Singapore: World Scientific, 2011. pp.449-482.
- [146] Tarasov V.E. *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems*. Elsevier Science, 2008.
- [147] Tarasov V.E. // *Ann. Phys.* **434**, 168667 (2021).
- [148] Tarasov V.E. // *Entropy*. **23**, N 8. 1006 (2021).
- [149] Tarasov V.E. // *Entropy*. **23**, N 5. 544 (2021).
- [150] Tarasov V.E. // *Mathematics*. **11**, N 20. 4400 (2023).
- [151] Calcagni G. // *J. High Ener. Phys.* **2010**, 120 (2010).
- [152] Calcagni G. // *J. High Ener. Phys.* **2012**, 65 (2012).
- [153] Lim S.C. // *Physica A*. **363**, N 2. 269 (2006).
- [154] Lim S.C., Teo L.P. in the book Klafter J., Lim S.C., Metzler R (Eds.), *Fractional Dynamics*.

- Recent Advances. Singapore: World Scientific, 2011. pp.483-506.
- [155] Tarasov V.E. // *Advan. High Energy Phys.* **2018**, 7612490 (2018).
- [156] Riesz M. // *Acta Math.* **81**, N 1. 1 (1949).
- [157] Pozrikidis C. *The Fractional Laplacian*. New York: CRC Press, Taylor and Francis Group 2016.
- [158] Tarasov V.E. // *J. Phys. A.* **39**, N 48. 14895 (2006).
- [159] Tarasov V.E. // *J. Math. Phys.* **47**, N 9. 092901 (2006).
- [160] Chaichian M., Demichev A. *Path Integrals in Physics: Volume II Quantum Field Theory, Statistical Physics and other Modern Applications*. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2001.
- [161] Tarasov V.E. // *Adv. High Ener. Phys.* **2014**, 957863 (2014).
- [162] Tarasov V.E. // *Mod. Phys. Lett. A.* **36**, N 14. 2140001 (2021).
- [163] Tarasov V.E. // *Phys. Lett. A.* **380**, N 1-2. 68 (2016).
- [164] Tarasov V.E. // *Mathematics.* **4**, N 3. 44 (2016).
- [165] Tarasov V.E. // *Int. J. Appl. Comput. Math.* **3**, N 4. 2779 (2017).
- [166] Tarasov V.E. // *Mod. Phys. Lett. A.* **35**, N 16. 2050135 (2020).
- [167] Fichtenholz G.M. *Infinite Series: Ramifications*. New York: Gordon and Breach, 1970.
- [168] Hardy G.H. *Divergent Series*. 2nd Ed., New York: American Mathematical Society, 2000.

REVIEW

Non-standard Models and New Calculations in Particle Physics, Gravity, and Cosmology

P. A. Baikov, E. E. Boos, V. E. Bunichev, S. Yu. Vernov, I. P. Volobuev, M. N. Dubinin^a, V. O. Egorov, D. M. Kazarkin, A. E. Pukhov, V. I. Savrin, V. A. Smirnov, M. N. Smolyakov, V. E. Tarasov, E. Yu. Fedotova

*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

E-mail: ^adubinin@theory.sinp.msu.ru

The review presents current results of broad-ranging research in the field of elementary particle physics, gauge models of quantum field theory, gravitation theory, and cosmology, as well as lattice non-local field theories. The development of multiloop calculations in quantum field theory is of great value for applications of theoretical methods. Original results related to «new physics» beyond the Standard Model, inflationary cosmologies and multiloop calculations are of great importance for modern high-energy physics, forming the basis for subsequent applications in the field of elementary particle theory and cosmology.

PACS: 12.15-y, 14.65.Ha, 14.80.-j, 14.40.Nd

Keywords: high-energy physics, Standard Model, field theories with extra dimensions, nonlocal lattice field theories, new physics beyond the Standard Model, collider experiments, multi-loop calculations, inflationary cosmology, dark matter in the Universe.

Received 22 December 2026.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2026. **81**, No. . Pp. .

Сведения об авторах

1. Байков Павел Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
2. Боос Эдуард Эрнстович — доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, директор НИИЯФ МГУ.
3. Буничев Вячеслав Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
4. Вернов Сергей Юрьевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
5. Волобуев Игорь Павлович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
6. Дубинин Михаил Николаевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. НИИЯФ МГУ; e-mail: dubinin@theory.sinp.msu.ru.
7. Егоров Вадим Олегович — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
8. Казаркин Дмитрий Михайлович — мл. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
9. Пухов Александр Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
10. Саврин Виктор Иванович — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
11. Смирнов Владимир Александрович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
12. Смоляков Михаил Николаевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
13. Тарасов Василий Евгеньевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.
14. Федотова Елена Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. НИИЯФ МГУ.