О допустимости некорректного выбора объема квантования

А. В. Белинский

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики; кафедра физики Земли. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: belinsky@inbox.ru

Статья поступила 05.06.2016, подписана в печать 08.07.2016.

Рассмотрены особенности выбора объема квантования на примере приготовления квантового многомодового состояния в процессе параметрического рассеяния. Выбран небольшой, заведомо некорректный объем, существенно упрощающий решение задачи, который тем не менее дает правильные результаты, за исключением малозначительного фазового сомножителя, что показало сравнение с более точным, корректным (в смысле объема квантования) решением. Выявление этого факта позволяет надеяться на существенное упрощение решения квантовых задач хотя бы в первом приближении.

Ключевые слова: параметрическое рассеяние света, объем квантования.

УДК: 530.1. PACS: 42.65.Lm.

Введение

Несмотря на, казалось бы, исчерпывающее описание процессов параметрического рассеяния света в литературе ([1–5] и цит. лит.), представляет интерес вновь возвратиться к анализу этого явления и на этом примере проследить особенности выбора объема квантования. В настоящей работе поставленная задача решается двумя способами. В первом случае рассматривается некорректный, но более удобный с практической точки зрения выбор объема квантования. Во втором случае используется более точное решение, справедливое для любого объема квантования. При сравнении, как ни странно, оказывается, что результаты получаются почти одинаковые. Это позволяет надеяться на то, что и в других задачах условия выбора объема квантования могут быть более мягкими.

Параметрическое рассеяние света

В процессе параметрического рассеяния света фотоны накачки распадаются на пары сигнальных (s) и холостых (i) фотонов с частотами

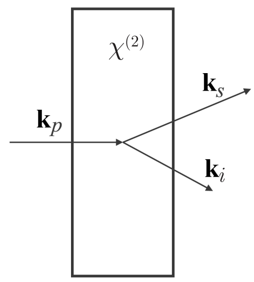
$$\omega_p = \omega_s + \omega_i. \quad (1)$$

Помимо этого фактически закона сохранения энергии должен сохраняться и импульс, следовательно, волновые векторы подчиняться соотношению (рисунок):

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (2)$$

Кроме того, существует жесткая связь между поляризациями сигнального и холостого фотонов.

Исчезновение фотона накачки описывается оператором уничтожения ∂p, а рождение вместо него сигнального и холостого фотонов — операторами рождения $\widehat{a}_s^+$ и $\widehat{b}_i^+$. Это поясняет структуру трехмодового гамильтониана взаимодействия процесса



В прозрачном нелинейном кристалле с квадратичной нелинейностью фотон накачки может распадаться на пару сигнального и холостого фотонов

параметрического рассеяния ([6–9] и цит. лит.)

$$\widehat{H} \sim \frac{i\hbar\chi^{(2)}}{2}\widehat{a}_p\widehat{a}^+{}_s\widehat{b}^+{}_i + \text{H.c.}, \quad (3)$$

где $\chi^{(2)}$ — квадратичная нелинейность, а эрмитово сопряженный оператор Н.с. описывает обратный параметрическому рассеянию процесс — рождение фотона накачки при одновременном исчезновении сигнального и холостого фотонов, который также возможен.

Поскольку эффективность параметрического рассеяния мала, истощением накачки в первом приближении можно пренебречь, считая ее амплитуду постоянной. С учетом того, что для реального наблюдения параметрического рассеяния фотонов в накачке должно быть много, ее можно описывать классически, заменив оператор $\widehat{a}_p$ в гамильтониане на постоянную комплексную амплитуду ε_p:

$$\widehat{H} \sim \frac{i\hbar\chi^{(2)}}{2}\varepsilon_p\widehat{a}^+{}_s(t)\widehat{b}^+{}_i(t) + \text{H.c.} \quad (4)$$

Для многомодовых пространственных полей феноменологический гамильтониан будет иметь вид (см., например, [10])

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2}\int\limits_V d^3\mathbf{r}\,\chi^{(2)}\varepsilon_p(\mathbf{r},t)\widehat{E}_s^{(-)}(\mathbf{r},t)\widehat{E}_i^{(-)}(\mathbf{r},t) + \text{H.c.}, \quad (5)$$

где

$$\widehat{E}_s^{(-)}(\mathbf{r},t) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi L_x L_y L_z}} \sum_{\mathbf{k}_s} \sqrt{\hbar\omega_s}\widehat{a}^+{}_{\mathbf{k}_s} e^{i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \mathbf{r})}, \tag{6}$$

$$\widehat{E}_i^{(-)}(\mathbf{r},t) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi L_x L_y L_z}} \sum_{\mathbf{k}_i} \sqrt{\hbar\omega_i}\widehat{b}^+{}_{\mathbf{k}_i} e^{i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \mathbf{r})} \tag{7}$$

— отрицательно-частотные операторы поля, эрмитово-сопряженные положительно-частотным операторам поля $\widehat{E}_{s,i}^{(+)}(\mathbf{r},t)$. Частоты $\omega_s = \frac{ck_s}{n_s}$, $\omega_i = \frac{ck_i}{n_i}$ меньше частоты накачки ω_p; $k_{s,i} = |\mathbf{k}_{s,i}|$; n_s и n_i — показатели преломления нелинейной среды; V — объем нелинейной среды; $\varepsilon_p(\mathbf{r},t)$ — классическая комплексная амплитуда накачки, которую далее полагаем плоской и монохроматической, распространяющейся по направлению оси z: $\varepsilon_p(\mathbf{r},t) = \varepsilon_p e^{i(k_p z - \omega_p t)}$, $k_p = |\mathbf{k}_p|$.

Объем квантования зададим равным объему нелинейной среды V, полагая, что она имеет форму прямоугольного параллелепипеда, хотя формально объем квантования должен быть существенно больше объема среды, так как на границах объема квантования амплитуды полей должны либо полностью спадать, либо не нарушать периодической структуры. Оси системы координат направим параллельно осям параллелепипеда, а ее центр расположим в центре параллелепипеда.

Динамика системы в представлении Гейзенберга описывается простыми соотношениями (см., например, [9]):

$$i\hbar\frac{d\widehat{a}_{\mathbf{k}_{s,i}}}{dt} = \left[\widehat{a}_{k_{s,i}}, \widehat{H}\right], \tag{8}$$

откуда

$$\frac{d\widehat{a}_{\mathbf{k}_s}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{a}^+{}_{\mathbf{k}_s}}. \tag{9}$$

Подставим сюда гамильтониан (5), тогда

$$\frac{d\widehat{a}_{\mathbf{k}_s}}{dt} = \frac{1}{V}\left\{ 2\widehat{a}^+{}_{\mathbf{k}_s} \int_V d^3\mathbf{r}\, C_{k_s k_s} e^{i[(2\omega_s - \omega_p)t - (2\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_p)\mathbf{r}]}\Big|_{\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_i} + \right.$$
$$\left. + \int_V d^3\mathbf{r} \sum_{k_i} C_{k_s k_i} \widehat{b}^+{}_{\mathbf{k}_i} e^{i[(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t - (\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)\mathbf{r}]} \right\},$$

где $C_{k_s k_i} = \frac{\chi^{(2)}\varepsilon_p\sqrt{\omega_s\omega_i}}{i\cdot 4\pi}$.

Это выражение справедливо, когда сигнальное (s) и холостое (i) излучения имеют одинаковые поляризации (вырождены по поляризации). Первое слагаемое в нем соответствует вырождению $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_i$. Это слагаемое равно нулю в случае взаимноортогональных поляризаций сигнального и холостого излучений, который и будет рассматриваться далее.

Интегрирование по $\mathbf{r}$ дает

$$\frac{d\widehat{a}_{\mathbf{k}_s}}{dt} = \sum_{k_{xi}}\sum_{k_{yi}}\sum_{k_{zi}} C_{k_s k_i}\widehat{b}^+{}_{\mathbf{k}_i} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t} \times$$
$$\times \operatorname{sinc}\left[(k_{xs} + k_{xi})\frac{L_x}{2}\right] \operatorname{sinc}\left[(k_{ys} + k_{yi})\frac{L_y}{2}\right] \times$$
$$\times \operatorname{sinc}\left[(k_{zs} + k_{zi})\frac{L_z}{2}\right]. \tag{10}$$

Интервалы между соседними модами $(k_{xs} + k_{xi})_{\min} = \frac{2\pi}{L_x}$ и аналогично для остальных компонент. Пусть $\widetilde{\mathbf{k}}_{xs} + \widetilde{\mathbf{k}}_{xi} = 0$, тогда $\operatorname{sinc}\left[(k_{xs} + k_{xi})\frac{L_x}{2}\right] = 1$. При $\widetilde{\mathbf{k}}_{xs} \neq k_{xs}$ и (или) $\widetilde{\mathbf{k}}_{xi} \neq k_{xi}$ имеем $(k_{xs} + k_{xi})\frac{L_x}{2} = \pi m$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, и $\operatorname{sinc}\left[(k_{xs} + k_{xi})\frac{L_x}{2}\right] = 0$.

Итак,

$$\frac{d\widehat{a}_{\widetilde{\mathbf{k}}_s}}{dt} = \widehat{b}^+{}_{\widetilde{\mathbf{k}}_i} C_{\widetilde{\mathbf{k}}_s\widetilde{\mathbf{k}}_i} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t}. \tag{11}$$

Это уравнение следует решать совместно с уравнением

$$\frac{d\widehat{b}_{\widetilde{\mathbf{k}}_i}}{dt} = \widehat{a}^+{}_{\widetilde{\mathbf{k}}_s} C_{\widetilde{\mathbf{k}}_s\widetilde{\mathbf{k}}_i} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t}. \tag{12}$$

Решение системы (11), (12) имеет вид

$$\widehat{a}_{\widetilde{\mathbf{k}}_s}(t) = e^{it\Delta/2}\left[\left(\operatorname{ch}\gamma t - i\frac{\Delta}{2\gamma}\operatorname{sh}\gamma t\right)\widehat{a}_{\widetilde{\mathbf{k}}_s}(0) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{C_{\widetilde{\mathbf{k}}_s\widetilde{\mathbf{k}}_i}}{\gamma}\operatorname{sh}\gamma t\right)\widehat{b}^+{}_{\widetilde{\mathbf{k}}_i}(0)\right], \tag{13}$$

$$\widehat{b}_{\widetilde{\mathbf{k}}_i}(t) = e^{it\Delta/2}\left[\left(\operatorname{ch}\gamma t - i\frac{\Delta}{2\gamma}\operatorname{sh}\gamma t\right)\widehat{b}_{\widetilde{\mathbf{k}}_i}(0) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{C_{\widetilde{\mathbf{k}}_s\widetilde{\mathbf{k}}_i}}{\gamma}\operatorname{sh}\gamma t\right)\widehat{a}^+{}_{\widetilde{\mathbf{k}}_s}(0)\right], \tag{14}$$

$$\Delta = \widetilde{\omega}_s + \widetilde{\omega}_i - \omega_p, \quad \gamma = \sqrt{|C_{\widetilde{\mathbf{k}}_s\widetilde{\mathbf{k}}_i}|^2 - \frac{\Delta^2}{4}}. \tag{15}$$

Подставляя эти решения в выражения для отрицательно-частотных операторов поля, получим операторы поля в кристалле в виде суперпозиции мод, удовлетворяющих условию

$$\widetilde{\mathbf{k}}_s + \widetilde{\mathbf{k}}_i - \mathbf{k}_p = 0. \tag{16}$$

Исследуем это ограничение. В рамках принятых допущений оно эквивалентно тому, что

$$n_s\widetilde{\omega}_s\cos\theta_s + n_i\widetilde{\omega}_i\cos\theta_i = n_p\omega_p, \tag{17}$$

где $\theta_{s,i}$ — углы с осью z, которые определяются из условий

$$\sin\theta_s = \frac{\widetilde{k}_{\perp s}}{\widetilde{k}_s}, \quad \sin\theta_i = \frac{\widetilde{k}_{\perp i}}{\widetilde{k}_i}, \tag{18}$$

откуда для малых углов $(\widetilde{k}_\perp \ll \widetilde{k})$ имеем

$$\cos\theta_s \approx 1 - \frac{\widetilde{k}^2_{\perp s}}{2\widetilde{k}_s}, \quad \cos\theta_i \approx 1 - \frac{\widetilde{k}^2_{\perp i}}{2\widetilde{k}_i}. \tag{19}$$

Рассмотрим вырожденный по частоте режим: $\widetilde{\omega}_s = \widetilde{\omega}_i = \omega_p$, тогда $\theta_s = \theta_i = \theta$, следовательно, $\widetilde{k}_s = \widetilde{k}_i = k$, и

$$\Delta = 2\omega - \omega_p = \omega\frac{k_\perp^2}{k^2} = \omega\sin^2\theta = \frac{vk_\perp^2}{k}, \tag{20}$$

где v — скорость света в среде.

Полагая $z = vt + z_0 = \frac{vt}{2}$, имеем

$$\widehat{a}_{k_\perp}(z) = e^{i(k_\perp^2/k)z}\left[\left(\operatorname{ch}2\frac{\gamma}{v}z - i\frac{k_\perp^2}{2k}\frac{v}{\gamma}\operatorname{sh}2\frac{\gamma}{v}z\right)\widehat{a}_{k_\perp}(-z) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{C_{kk}}{\gamma}\operatorname{sh}2\frac{\gamma}{v}z\right)\widehat{b}^+{}_{-k_\perp}(-z)\right],$$

или

$$\widehat{a}_{k_\perp}\left(\frac{L_z}{2}\right) = e^{i(k_\perp^2/k)L_z} \times \\ \times \left[\left(\operatorname{ch}\frac{\gamma}{v}L_z - i\frac{k_\perp^2}{2k}\,\frac{v}{\gamma}\operatorname{sh}\frac{\gamma}{v}L_z\right)\widehat{a}_{k_\perp}\left(-\frac{L_z}{2}\right) + \\ + \left(\frac{C_{kk}}{\gamma}\operatorname{sh}\frac{\gamma}{v}L_z\right)\widehat{b}^{+}{}_{-k_\perp}\left(-\frac{L_z}{2}\right)\right], \quad (21)$$

где коэффициент C_{kk} имеет вид

$$C_{kk} = \frac{\chi^{(2)}\omega\varepsilon_p}{i\cdot 4\pi},$$

и аналогично для $\widehat{b}_{k_\perp}$ и соответствующих эрмитово-сопряженных операторов.

Заметим, что $e^{i\mathbf{kr}} = e^{i\left(k+k_\perp^2/(2k)\right)L_z}$, поскольку

$$\mathbf{kr} = \mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp + k_zL_z = \left(k\sin^2\theta + \sqrt{k^2-k_\perp^2}\right)L_z \approx \\ \approx \left[\frac{k_\perp^2}{k} + k\left(1-\frac{k_\perp^2}{2k}\right)L_z\right].$$

Сравним теперь полученный результат с решением той же задачи также в приближении заданной накачки, но в представлении Гейзенберга. При этом будем полагать, что параметрическое рассеяние описывается квазилинейными уравнениями параболического типа (см., например, [4–7]):

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\Delta_\perp}{2k_{s,i}}\right)\widehat{E}^{(+)}_{s,i}(\mathbf{r}_\perp, z) = \beta\widehat{E}^{(-)}_{i,s}(\mathbf{r}_\perp, z), \qquad (22)$$

где β — комплексный коэффициент нелинейной связи, зависящий от амплитуды, фазы и профиля накачки, а также от вида и геометрии взаимодействия, $\widehat{E}^{(+)}$ и $\widehat{E}^{(-)}$ — операторы положительно- и отрицательно-частотной частей поля в представлении Гейзенберга.

Решение предыдущего уравнения можно записать для фурье-компонент $\widehat{E}^{(+)}_j(\varkappa, z)$ оператора $\widetilde{E}^{(+)}_j(\mathbf{r}_\perp, z)$ в виде

$$\widehat{E}^{(+)}_{s,i}(\varkappa, z) = \left(\operatorname{ch}(\alpha z) - i\theta\alpha^{-1}\operatorname{sh}(\alpha z)\right)\widehat{E}^{(+)}_{s,i}(\varkappa, 0) + \\ + |\beta|\alpha^{-1}e^{i\varphi}\operatorname{sh}(\alpha z)\widehat{E}^{(-)}_{i,s}(-\varkappa, 0), \quad (23)$$

где $\varkappa$ — переменная фурье-преобразования, $\alpha = 2\frac{\gamma}{v}$, $\theta = \frac{k_\perp^2}{k}$, $\beta = \frac{\chi^{(2)}\omega\varepsilon_p}{i\cdot 4\pi v}$, φ — аргумент β, т. е. фаза накачки.

С точностью до фазового сомножителя $e^{i(k_\perp^2/2k)L_z}$, связанного с дополнительным фазовым набегом наклонных пучков, решение, полученное в первом случае (21), совпадает с решением, полученном во втором (23). При описании прямого детектирования параметрически рассеянного света вблизи нелинейного кристалла наличие этого сомножителя никак не повлияет на результат, поскольку квадратичный детектор фотонов реагирует на не зависящий от фазы квадрат модуля комплексной амплитуды поля или оператор числа фотонов в квантовом описании. Однако при удалении детекторов от параметрического генератора ситуация изменится, ведь фазовый сомножитель $e^{i(k_\perp^2/2k)L_z}$ фактически эквивалентен дополнительной линзе в параксиальном приближении, т. е. ход лучей будет иным. Более того, существенным будет искажение и в случае приготовления сжатых состояний света посредством параметрического рассеяния, поскольку этот процесс очень чувствителен в фазе взаимодействующих мод (см., например, [4–7]), а также в интерференционных схемах. Поэтому рассмотренное приближение следует применять с осторожностью, зная его некорректность в отношении этого фазового сомножителя. Вообще же говоря, коррекция фазы не представляет сложности введением дополнительных линз. Например, повышение эффективности квантового сжатия в расходящихся пучках легко осуществляется собирающей линзой с фокусным расстоянием f', значительно превышающим линейные размеры кристалла L_x, L_y, L_z. Оптическая ось линзы при этом должна совпадать с осью z (см., например, [2, 3]).

Таким образом, задача многомодового параметрического рассеяния света решена в двух вариантах: минимального (некорректного) объема квантования в представлении Шрёдингера и более корректного, не зависящего выбора определенного объема квантования, в представлении Гейзенберга; получены почти одинаковые результаты. Это позволяет надеяться на то, что, хотя бы в первом приближении, можно решать квантовые задачи несколько проще, чем это требуется при абсолютно правильно выбранном объеме квантования.

Заключение

Итак, на основании исследования особенностей выбора объема квантования в процессе многомодового параметрического рассеяния света можно сделать вывод о допустимости в первом приближении использовать ради простоты не совсем корректный объем, меньший традиционно применяемого, но существенно упрощающего вычисления. Хотя это и выходит за рамки настоящей работы, отметим, что такое упрощение возможно окажется полезным при выборе объема квантования и в случае существенно неоднородных сред с заведомо малыми размерами: фотонные кристаллы, гетероструктуры, одиночные квантовые точки, квантовые ямы и др. (см., например, [11, 12] и цит. лит.). Именно эти среды составляют основу приоритетных исследований в настоящее время.

Список литературы

1. *Смирнов Д.Ф., Трошин А.С.* // УФН. 1987. **153**. С. 233.
2. *Колобов М.И., Соколов И.В.* // ЖЭТФ. 1989. **96**. С. 1945.
3. *Колобов М.И., Соколов И.В.* // Изв. АН СССР. 1990. **54**. С. 2328.

4. *Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С.* // Квант. электроника. 1988. **15**. С. 873.
5. *Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С.* Фазовая бистабильность и мультистабильность в сосредоточенных и распределенных системах: классический и квантовый аспекты // Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. Гл. 3. С. 83.
6. *Белинский А.В., Чиркин А.С.* // Квантовая электроника. 1989. **16**, № 12. С. 2551.
7. *Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С.* // Оптика и спектроскопия. 1989. **66**. С. 738.
8. *Белинский А.В.* Квантовые измерения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. С. 59.
9. *Клышко Д.Н.* Физические основы квантовой электроники. М.: Наука, 1986.
10. *Белинский А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 3. С. 34.
11. *Федоров А.В.* Физика и технология гетероструктур, оптика квантовых наноструктур. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009.
12. *Леденцов Н.Н., Устинов В.М., Щукин В.А.* и др. // Физика и техника полупроводников. 1998. **32**, № 4. С. 385.

On the possibility of an incorrect choice of a quantization volume

A. V. Belinsky

Department of Computer Modeling and Informatics; Department of Physics of the Earth,
Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow 119991, Russia.
E-mail: belinsky@inbox.ru.

The specific features of the choice of an incorrect quantization volume, based on the example of the preparation of a multimode quantum state in parametric scattering, are considered. A small definitely incorrect volume that substantially simplifies the solution of the problem is chosen; it is shown to yield correct results except for an insignificant phase factor, which is proved by comparison with a more accurate correct (in the sense of the quantization volume) solution. This provides hope that the solution of quantum problems can be considerably simplified, at least to a first approximation.

Keywords: parametric light scattering, quantization volume.
PACS: 42.65.Lm.
Received 5 June 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **71**, No. 1. Pp. 76–79.

Сведения об авторе

Белинский Александр Витальевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, профессор;
тел.: (495) 939-41-78, e-mail: belinsky@inbox.ru.