

О Б З О Р ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Математическое моделирование феноменов случайности и нечеткости в научных исследованиях. 1. Математические и эмпирические основы

Ю. П. Пытьев

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра математического моделирования и информатики.*

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru, yuri.pytyev@gmail.com

Статья поступила 22.06.2016, подписана в печать 13.07.2016.

Рассмотрен вариант теории возможностей как математической модели феноменов случайности и нечеткости, позволяющий моделировать как вероятностную случайность, в том числе свойственную непредсказуемо эволюционирующим стохастическим объектам, вероятностные модели которых не могут быть восстановлены эмпирически, так и невероятностную случайность (нечеткость), свойственную реальным физическим, техническим, экономическим объектам, человеко-машинным, экспертным системам и др. Показаны принципиальные отличия рассмотренного варианта от известных вариантов теории возможностей, в частности в математическом формализме и в его связи с теорией вероятностей, в его содержательной интерпретации и в приложениях, проиллюстрированных (в статье «Математическое моделирование феноменов случайности и нечеткости в научных исследованиях. 2. Приложения») на примерах решения задач оптимизации идентификации и оценивания, эмпирического восстановления нечеткой модели объекта исследования, решения задач анализа и интерпретации данных измерительного эксперимента и др.

Ключевые слова: вероятность, случайность, возможность, необходимость, нечеткость.

УДК: 517.977.14. PACS: 07.05.Kf.

В этой статье рассмотрены математические и эмпирические основы варианта теории мер возможности, необходимости и интегрирования относительно этих мер, ориентированного на математическое моделирование вероятностной и невероятностной случайности и на приложения в научных исследованиях как альтернативы теории вероятностей. Вариант существенно отличается от известных вариантов теории возможностей [8–12, 15–18, 20–22, 25, 29, 42–44, 46, 49, 50, 57]. Его основы опубликованы в серии статей в ВМУ в 1997–1999 гг. [65–73], итоги исследований и новые результаты представлены в монографиях [28, 51] и в настоящей статье.

В п. 1.1 рассмотрены проблемы интерпретации событийно-частотных наблюдений за эволюционирующим стохастическим¹ объектом (Э.СТ.О.) и эмпирического восстановления его вероятностной модели. Для их преодоления в качестве альтернативной модели вероятностной случайности, свойственной Э.СТ.О., в п. 1.2 предложена *возможность как мера относительной предопределенности результатов событийно-частотных наблюдений* за Э.СТ.О. В п. 1.2 охарактеризованы свойства возможности, позволяющие эмпирически восстанавливать возможностьные модели классов Э.СТ.О.,

решать задачи, типичные для приложений теории вероятностей, моделировать вероятностную и невероятностную случайность (нечеткость), свойственную человеко-машинным, социальным, экологическим системам, бизнесу и т. д. [22].

Свойства возможности P , позволяющие моделировать Э.СТ.О., обусловлены ее связью с изменяющейся вероятностью Pr в его вероятностной модели $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Pr)$, где $\mathcal{P}(\Omega)$ — класс всех подмножеств $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, а именно если вероятности $pr_i = Pr(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, произвольно изменяются в процессе наблюдений за Э.СТ.О., *оставаясь одинаково упорядоченными*, например, согласно условию (*) $pr_1 \geq pr_2 \geq \dots \geq 0$, $pr_1 + pr_2 + \dots = 1$, то в *возможностной модели* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ Э.СТ.О:

- возможности $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяют *согласованному* с (*) условию (**) $1 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq 0$, причем *численные значения* $P(A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, в частности значения $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, отличные от 0 и 1, *не имеют содержательной интерпретации*, но важна их упорядоченность, более того,
- возможности $P(\cdot)$ и $P'(\cdot)$ *взаимно эквивалентны*, если $\exists \gamma(\cdot) \in \Gamma \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) P'(A) = \gamma(P(A))$, где Γ — класс непрерывных, строго монотонных функций

¹ Стохастическим называется объект, моделью которого в каждый момент является некоторое вероятностное пространство.

$\gamma(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, являющийся группой относительно групповой операции $\circ$, $(\gamma' \circ \gamma)(a) = \gamma'(\gamma(a))$, $a \in [0, 1]$, а

• каждая конкретная упорядоченность, выделенная в (**) двоичным числом $e = 0, e_1 e_2 \dots \in (0, 1)$ согласно условию $e_i = 1$, если $p_i > p_{i+1}$, $e_i = 0$, если $p_i = p_{i+1}$, определяет класс взаимно эквивалентных возможностей.

Если $\mathbb{P}$ — класс возможностей, удовлетворяющих условию (**), $\mathbb{P}_{(e)}$ класс взаимно эквивалентных возможностей, упорядоченность значений $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, которых определена двоичным числом e , то $\mathbb{P}_{(e)} \cap \mathbb{P}_{(e')} = \emptyset$, $e \neq e'$, и (***) $\mathbb{P} = \bigcup_{e \in (0, 1)} \mathbb{P}_{(e)}$.

В п. 1.3 определены понятия шкалы $\mathcal{L} = ([0, 1], \leq, +, \times)$ значений возможности и порожденной группой Γ группы $\bar{\Gamma}$ ее изотонных автоморфизмов $\gamma: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, $\gamma \in \bar{\Gamma}$, согласно которой $\forall \gamma(\cdot) \in \Gamma \forall a, b \in [0, 1] \gamma(a + b) = \gamma(a) + \gamma(b)$, $\gamma(a \times b) = \gamma(a) \times \gamma(b)$, и показано, что при естественных требованиях к операциям сложения $+$ и умножения $\times$ последние суть $\max$ и $\min$, а возможность $P(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$.

$P(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Поскольку равенство $P(\Omega) = P(A) + P(\Omega \setminus A) = 1$ при заданном $P(A)$, вообще говоря, не определяет $P(\Omega \setminus A)$, событие $A = \bigcap_{i: \omega_i \in \Omega \setminus A} (\Omega \setminus \{\omega_i\})$ охарактеризовано как противоположное $\Omega \setminus A$ мерой необходимости

$N(A) = \inf_{i: \omega_i \in \Omega \setminus A} N(\Omega \setminus \{\omega_i\})$. В этом же

пункте введены понятия шкалы значений необходимости, группы ее автоморфизмов и классов $\mathbb{N}_{(e)}$, $e \in (0, 1)$, взаимно эквивалентных возможностей. Поэтому аналог вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$ — пространство с двумя мерами $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P, N)$, названное нечетким.

В п. 1.4 определена группа $\bar{\Gamma}$ изоморфизмов $\gamma: \mathcal{L} \rightarrow \gamma\mathcal{L}$, все шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \bar{\Gamma}$, считаются изоморфными. Пункт 1 завершается формулировкой «Принципа относительности», подобного принципу относительности в физике, согласно которому сформулированные в шкалах $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ модели считаются эквивалентными, если в некоторой шкале $\mathcal{L} = \gamma'\mathcal{L}' = \gamma''\mathcal{L}''$, $\gamma', \gamma'' \in \bar{\Gamma}$, их формулировки совпадают, а модели, формулировки которых совпадают во всех шкалах $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \bar{\Gamma}$, т.е. одинаковы для всех исследователей, могут быть содержательно истолкованы. Принцип относительности определил рассматриваемый вариант теории возможностей и его существенные отличия от известных вариантов теории возможностей.

В п. 2 введено понятие максимальной согласованности возможности и необходимости с вероятностью и для каждого $e \in (0, 1)$ установлено взаимно однозначное соответствие между классами

$\mathbb{P}_{(e)}$ и $\mathbb{N}_{(e)}$ взаимно эквивалентных возможностей и необходимостей и классом $\mathbb{P}_{(e)}$ взаимно нечетко эквивалентных вероятностей. Получены формулы, выражающие значения любых возможности $P(\cdot) \in \mathbb{P}_{(e)}$ и необходимости $N(\cdot) \in \mathbb{N}_{(e)}$ через значения любой вероятности $\text{Pr}(\cdot) \in \mathbb{P}_{(e)}$.

В п. 3 введены понятия $\text{Pr}^1, \dots, \text{Pr}^k$ -измеримых возможности и необходимости, дана их событийно-частотная интерпретация, показано, что при естественных условиях регулярности вероятностей $\text{Pr}^1, \dots, \text{Pr}^k$ и принадлежности их некоторому классу $\mathbb{P}_{(e)}$ данные почти наверное (п.н.) конечного числа событийно частотных наблюдений позволяют безошибочно восстановить класс взаимно эквивалентных нечетких моделей $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P, N)$, $P \in \mathbb{P}_{(e)}$, $N \in \mathbb{N}_{(e)}$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, каждого наблюдения, и рассмотрен алгоритм, восстанавливающий на основе данных п.н. конечного числа наблюдений нечеткую модель Э.С.Т.О., верную с гарантированной вероятностью.

В п. 4 определены p - и p -интегралы, дано их общее выражение как интегралов относительно P - и N -мер. Установлено соответствие между классами взаимно нечетко эквивалентных математических ожиданий и классами взаимно эквивалентных p - и p -интегралов. Введены понятия нечеткого элемента, нечеткого множества, их независимости, условных и переходных возможностей, необходимости и их распределений.

В каждом пункте приведены обзор и сравнение известных вариантов теории возможностей с вариантом, рассматриваемым в настоящей статье.

В статье «Математическое моделирование феноменов случайности и нечеткости в научных исследованиях. 2. Приложения» рассмотрены элементы теории оптимальных нечетких решений, аналогичной теории оптимальных статистических решений, проверки нечетких гипотез, подобной теории Неймана–Пирсона, рассмотрен последовательный алгоритм нечеткой идентификации, подобный последовательному статистическому критерию Вальда, и даны элементы теории нечетких измерительно-вычислительных преобразователей и ее приложений в задачах анализа данных измерительного эксперимента.

1. Вероятность, возможность, необходимость

Теория вероятностей используется для моделирования феномена случайности благодаря двум ее фундаментальным аспектам: математическому, основанному на теории меры и интеграла, и эмпирическому, согласно которому при определенных условиях данные событийно-частотных наблюдений определяют сколь угодно точную аппроксимацию их вероятностной модели, а известная вероятностная модель наблюдений позволяет прогнозировать их событийно-частотные результаты.

Однако при моделировании реальных физических, технических, социальных, экономических

и других сложных и, как правило, эволюционирующих объектов, человеко-машинных [22] и экспертных систем вероятностные методы де-факто оказались неэффективными. Причиной неэффективности, как правило, является неадекватность вероятностного моделирования. Дело в том, что

- «эмпирический аспект» теории вероятностей не столь фундаментален, как математический, ибо не содержит критериев вероятностной природы случайности и упомянутых «определенных условий» наблюдения. Поэтому не исключено, что модели названных объектов не могут быть сформулированы в терминах вероятностной случайности, но теория вероятностей не позволяет ни подтвердить это, ни опровергнуть;

- при эмпирическом восстановлении вероятностной модели заведомо стохастического объекта (СТ.О.) возникают принципиальные трудности, когда в процессе наблюдений его вероятностная модель непредсказуемо изменяется и ее эмпирическая оценка оказывается неадекватной. Более того, вероятностную модель произвольно эволюционирующего СТ.О. восстановить эмпирически невозможно, если наблюдения за объектом не позволяют восстановить модель его эволюции [54].

Этим объясняется интерес к невероятностным моделям случайности и неопределенности [1–58, 65–73] и к робастным статистическим процедурам анализа данных [60–62].

1.1. Проблемы эмпирического восстановления и интерпретации вероятности

Условимся называть стохастическим эксперимент (СТ.Э.), моделью которого в каждый момент является некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ и определенная на нем функция $\chi(\cdot)$, значение которой определяет исход СТ.Э., его повторения назовем испытаниями. Далее, как правило, $\chi(\cdot)$ — индикатор наблюдаемого в СТ.Э. события $A \in \mathcal{A}$: $\chi_A(\omega) = 1$, $\omega \in A$, $\chi_A(\omega) = 0$, $\omega \in \Omega \setminus A$, $\omega \in \Omega$, его частота $\nu^{(n)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_A(\omega^{(i)})$ — результат наблюдения исходов n взаимно независимых испытаний, $\omega^{(i)}$ — исход i -го испытания, $i = 1, \dots, n$.

① Если СТ.О., наблюдаемый в СТ.Э., не эволюционирует в процессе испытаний, модель которых $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr}) \times \dots \times (\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr}) \times \dots$, то¹, как известно [55], $\forall A \in \mathcal{A}$ с увеличением n частота $\nu^{(n)}(A)$ приближается и почти наверное (п.н.) остается близкой к вероятности $\text{Pr}(A)$, короче, $\nu^{(n)}(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \text{Pr}(A)$. Этот факт, известный как усиленный закон больших чисел (УЗБЧ), определяет эмпирическую интерпретацию вероятности: в достаточно длинной последовательности взаимно независимых испытаний:

- вероятность любого события сколь угодно точно прогнозирует его частоту,

- частота любого события сколь угодно точно оценивает его вероятность, а следовательно, и модель $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ каждого испытания.

② Если наблюдаемый СТ.О. в процессе испытаний непредсказуемо эволюционирует, в модели взаимно независимых испытаний $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr}_1) \times \dots \times (\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr}_n) \times \dots$ вероятности произвольно изменяются от испытания к испытанию, то, согласно этому же УЗБЧ $\forall A \in \mathcal{A}$, частота $\nu^{(n)}(A)$ с увеличением n все более точно следует за вероятностью $\text{Pr}^{(n)}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Pr}_i(A)$: $\forall A \in \mathcal{A}$ $\nu^{(n)}(A) - \text{Pr}^{(n)}(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} 0$. В этом случае

- частоты событий не оценивают их вероятности, контролировавшие исходы испытаний, и не позволяют восстановить вероятностную модель $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr}_i)$ каждого испытания, $i = 1, 2, \dots$, а
- вероятности событий не прогнозируют их частоты.

③ Если вероятности $\text{Pr}_1, \text{Pr}_2, \dots$ изменяются с некоторой стохастической закономерностью, а именно если $\text{Pr}_i(\cdot) = \text{Pr}(\cdot | t_i)$ — переходная вероятность, $i = 1, 2, \dots$, где $t_1, t_2, \dots$ суть значения взаимно независимых копий $\tau_1, \tau_2, \dots$ некоторой случайной величины τ , то $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Pr}(A | \tau_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \text{E}_\tau \text{Pr}(A | \cdot)$ и, следовательно, $\nu^{(n)}(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \text{E}_\tau \text{Pr}(A | \cdot) = \overline{\text{Pr}}(A)$, $A \in \mathcal{A}$. В этом случае

- частота $\nu^{(n)}(A)$ оценивает вероятность $\overline{\text{Pr}}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, но не позволяет восстановить вероятностную модель $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr}_i)$ каждого испытания, $i = 1, 2, \dots$

Итак, если невозможно прогнозировать эволюцию СТ.О. [54], то вероятностная модель каждого испытания может быть восстановлена эмпирически лишь в случае ①, который, к сожалению, редко встречается на практике.

1.2. Возможность как мера относительной предопределенности исходов СТ.Э. Классы эквивалентных возможностей

Возможность как альтернативная вероятности модель вероятностной случайности прогнозирует относительную предопределенность, шанс любого исхода каждого испытания, модель которого $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

При любом определении возможности p_i события $\{\omega_i\}$ как значения меры возможности $\text{Pr}(\cdot)$: $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, при каждом испытании оценивающей шанс произойти элементарному событию $\{\omega_i\}$ в сравнении с шансами произойти другим элементарным событиям, естественно считать, что должно быть выполнено условие согласованности $\text{Pr}(\cdot)$ с $\text{Pr}(\cdot)$: $\text{Pr}(\{\omega_i\}) = p_i \geq p_j = \text{Pr}(\{\omega_j\}) \Rightarrow \text{Pr}(\{\omega_i\}) = p_i \geq p_j = \text{Pr}(\{\omega_j\})$ и, следовательно, $p_i > p_j \Rightarrow p_i > p_j$; заметим, что для выполнения такого условия

¹ Модель каждого испытания — $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$, Pr — вероятность, контролирующая его исход.

- не требуются значения $pr_1, pr_2, \dots$, достаточна лишь их упорядоченность,
- вероятности $pr_1, pr_2, \dots$ могут произвольно изменяться от испытания к испытанию, оставаясь одинаково упорядоченными, например, согласно условию

$$1 \geq pr_1 \geq pr_2 \geq \dots > 0, \quad pr_1 + pr_2 + \dots = 1. \quad (1)$$

Далее будет показано, что эти замечания определяют возможность как альтернативную вероятности меру случайности, эффективную как для моделирования вероятностной случайности, свойственной Э.СТ.О., позволяющую эмпирически восстанавливать возможность модели классов таких объектов, решать задачи, типичные для приложений теории вероятностей, в том числе для приближенно заданных вероятностных моделей и др., так и для моделирования невероятностной случайности, называемой далее нечеткостью, характерной для человеко-машинных, социальных, экономических систем, медицины, бизнеса и т. п. [22].

Сравним вероятностное и возможностное моделирование и задачи эмпирического восстановления вероятностной и возможностной моделей СТ.О., моделью которого является класс $Pr = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Pr), Pr \in \mathbb{P}\}$ вероятностных пространств, где $\mathbb{P}$ — класс вероятностей, удовлетворяющих (1). Понятно, что:

- знание одной лишь упорядоченности $pr_1, pr_2, \dots$ (1) не позволяет охарактеризовать свойства СТ.О. в терминах теории вероятностей, а
- если в процессе наблюдений за СТ.О. значения $pr_1, pr_2, \dots$ в (1) произвольно изменяются от испытания к испытанию, то его модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Pr_1) \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Pr_2) \times \dots$, $Pr_i \in \mathbb{P}$, $i = 1, 2, \dots$, не может быть восстановлена эмпирически.

Условимся считать, что в возможностной модели $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ СТ.О.

- возможности $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяют согласованному с (1) условию

$$1 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq 0, \quad (2)$$

- численные значения $P(A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, в частности $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, кроме 0 и 1, не имеют содержательной интерпретации, важна лишь их упорядоченность, а
- возможности $P(\cdot)$ и $P'(\cdot)$ взаимно эквивалентны, если $\exists \gamma(\cdot) \in \Gamma \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) P'(A) = \gamma(P(A))$, где Γ — класс непрерывных, строго монотонных функций $\gamma(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, являющийся группой относительно групповой операции $\circ$, $(\gamma' \circ \gamma)(a) = \gamma'(\gamma(a))$, $a \in [0, 1]$,
- каждая конкретная упорядоченность, выделенная в (2) двоичным числом $e = 0, e_1 e_2 \dots \in (0, 1)$, согласно условию $e_i = 1$, если $p_i > p_{i+1}$, $e_i = 0$, если $p_i = p_{i+1}$, определяет класс взаимно эквивалентных возможностей.

Обозначим $\mathbb{P}$ класс возможностей, удовлетворяющих условию (2), $\mathcal{P} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P), P \in \mathbb{P}\}$ — класс пространств с возможностью, как возможностную модель СТ.О., $\mathbb{P}_{(e)}$ — класс взаимно эквивалентных возможностей, упорядоченность значений $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, которых определена двоичным числом $e = 0, e_1 e_2 \dots \in (0, 1)$; понятно, что $\mathbb{P}_{(e)} \cap \mathbb{P}_{(e')} = \emptyset$, если $e \neq e'$, и

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e \in (0, 1)} \mathbb{P}_{(e)}. \quad (3)$$

Так как возможности $P \in \mathbb{P}_{(e)}$ взаимно эквивалентны, класс $\mathbb{P}_{(e)}$ определяет единственную с точностью до эквивалентности возможностную модель $\mathcal{P}_{(e)} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P), P \in \mathbb{P}_{(e)}\}$, $\mathcal{P} = \bigcup_{e \in (0, 1)} \mathcal{P}_{(e)}$ — разбиение возможностной модели СТ.О. на классы взаимно эквивалентных, то

- задача эмпирического восстановления возможностной модели СТ.О. эквивалентна задаче эмпирического восстановления значения $e \in (0, 1)$, см. замечание 3.1.

1.3. Шкалы значений возможности и необходимости. Возможность и необходимость события.

Нечеткая модель

Обозначим:

- $\mathcal{L} = ([0, 1], \leq, +, \times)$ шкалу значений возможности $P(\cdot)$ как интервал $[0, 1]$ с естественной упорядоченностью $\leq$ и с бинарными операциями сложения $+: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ и умножения $\times: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$,
- $\bar{\Gamma}$ группу изотонных автоморфизмов $\mathcal{L}$, $\gamma: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, $\gamma \in \bar{\Gamma}$, порожденную группой Γ строго монотонных непрерывных функций $\gamma(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, сохраняющих конкретную упорядоченность в (2). Поскольку $\bar{\Gamma}$ — группа автоморфизмов $\mathcal{L}$, то $\forall \gamma(\cdot) \in \Gamma, \forall a, b \in [0, 1]$,

$$\gamma([0, 1]) = [0, 1], \quad \gamma(a + b) = \gamma(a) + \gamma(b), \quad \gamma(a \times b) = \gamma(a) \times \gamma(b). \quad (4)$$

Теорема 1.1. Если

- бинарные операции $+$ и $\times$ суть непрерывные отображения $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$,
- $\forall a, b \in [0, 1] \quad a \times b = b \times a, \quad 0 \times a = 0, \quad 1 \times a = a, \quad a + b = b + a, \quad 0 + a = a, \quad 1 + a = 1,$
- $\forall \gamma(\cdot) \in \Gamma$ выполнены условия (4),
то $\forall a, b \in [0, 1] \quad a + b = \max\{a, b\}, \quad a \times b = \min\{a, b\}.$

Доказательство. Пусть $0 \leq x < y \leq 1$ и последовательность $\gamma_n(\cdot) \in \Gamma$, $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяет условиям: $\gamma_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $0 \leq z \leq x$, $\gamma_n(z) = z$, $y \leq z \leq 1$. Тогда $\forall x < y \quad \gamma_n(x + y) = \gamma_n(x) + \gamma_n(y) = \gamma_n(x) + y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \Rightarrow x + y = \max\{x, y\}$, а если $\gamma_n(z) = z$, $0 \leq z \leq x$, $\gamma_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, $y \leq z \leq 1$, то $\gamma_n(x \times y) = \gamma_n(x) \times \gamma_n(y) = x \times \gamma_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow x \times y = \min\{x, y\}$. $\square$

Возможность $P(\cdot): \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}$, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, определим (эвристически, см. определения 4.1) в терминах ее численных значений

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i: \omega_i \in A} p_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\}),$$

$$A \neq \emptyset, \quad P(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad P(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{\infty} p_i \stackrel{\text{def}}{=} 1 = p_1, \quad (5)$$

подобно вероятности $\text{Pr}(\cdot): \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \text{Pr}(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} \text{pr}_i = \sum_{i: \omega_i \in A} \text{Pr}(\{\omega_i\}),$$

$$A \neq \emptyset, \quad \text{Pr}(\emptyset) = 0, \quad \text{Pr}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{pr}_i \stackrel{\text{def}}{=} 1. \quad (5^*)$$

Согласно (5) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega): A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $P(A \cap B) \leq P(A) \times P(B)$, $\forall P(\cdot): \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}$ либо $P(A) > P(B)$, либо $P(A) < P(B)$, либо $P(A) = P(B)$.

Поскольку возможности противоположных событий связывает равенство $P(\Omega) = P(A) + P(\Omega \setminus A) = 1$, вообще говоря, не определяющее $P(\Omega \setminus A)$ при заданном $P(A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, охарактеризуем каждое событие значениями двух мер — возможности $P(\cdot): \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}$ и необходимости $N(\cdot): \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$, принимающей значения в шкале $\hat{\mathcal{L}} = (\hat{0}, \hat{1}, \hat{\leq}, \hat{+}, \hat{\times})$, в которой $a \hat{\leq} b \iff a \geq b$, $\hat{0} = 1$, $\hat{1} = 0$, $\hat{0} \hat{\leq} \hat{1}$, $[\hat{0}, \hat{1}] = [0, 1]$, $a \hat{+} b \stackrel{\text{def}}{=} \min\{a, b\}$, $a \hat{\times} b \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a, b\}$, $a, b \in [\hat{0}, \hat{1}]$, и подобно (4) $\forall \gamma(\cdot) \in \Gamma$ $\forall a, b \in [\hat{0}, \hat{1}]$

$$\gamma([\hat{0}, \hat{1}]) = [\hat{0}, \hat{1}], \quad \gamma(a \hat{+} b) = \gamma(a) \hat{+} \gamma(b),$$

$$\gamma(a \hat{\times} b) = \gamma(a) \hat{\times} \gamma(b), \quad (6)$$

поскольку $\bar{\Gamma}$ — группа автоморфизмов и шкалы $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\gamma}: \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\gamma} \in \bar{\Gamma}$.

Определим согласованную с упорядоченностью в (2) упорядоченность

$$0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \quad (7)$$

значений $n_i \stackrel{\text{def}}{=} N(\Omega \setminus \{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, и необходимость $N(\cdot): \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \hat{\mathcal{L}}: \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$N(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i: \omega_i \in \Omega \setminus A} n_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{i: \omega_i \in \Omega \setminus A} N(\Omega \setminus \{\omega_i\}), \quad (8)$$

$$A \neq \Omega, \quad N(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad N(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0 = n_1,$$

характеризующую событие $A = \bigcap_{i: \omega_i \in \Omega \setminus A} \{\Omega \setminus \{\omega_i\}\}$

как противоположное $\Omega \setminus A$.

Класс необходимостей, удовлетворяющих (7), обозначим $\mathbb{N}$. Конкретную упорядоченность в (7) зададим $\hat{e} = 0, \hat{e}_1 \hat{e}_2 \dots \in (0, 1)$, $\hat{e}_i = 1$, если $n_i < n_{i+1}$, $\hat{e}_i = 0$, если $n_i = n_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$. Обозначим $\mathbb{N}_{(\hat{e})}$ класс взаимно эквивалентных необходимостей,

упорядоченность значений n_i , $i = 1, 2, \dots$, которых определена числом $\hat{e}$. При этом подобно (3) $\mathbb{N} = \bigcup_{\hat{e} \in (0, 1)} \mathbb{N}_{(\hat{e})}$, где $\mathbb{N}_{(\hat{e})} \cap \mathbb{N}_{(\hat{e}')} = \emptyset$, $\hat{e} \neq \hat{e}'$, $\hat{e}, \hat{e}' \in (0, 1)$.

Замечание 1.1. В общем случае нечеткая модель — пространство $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P, N)$ с двумя мерами, называемое далее нечетким пространством, связь P и N определяется свойствами моделируемого объекта. В частности, в нечеткой модели СТ.О. P и N максимально согласованы с вероятностью Pr в его модели $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$, см. п. 2.1, и оказываются дуально согласованными (дуально изоморфными) [51]: $\exists \theta(\cdot) \in \Theta \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad N(A) = \theta(P(\Omega \setminus A))$, $n_i = N(\Omega \setminus \{\omega_i\}) = \theta(P(\{\omega_i\})) = \theta(p_i)$, $i = 1, 2, \dots$, где Θ — класс непрерывных функций¹ $\theta(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, строго монотонных, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, а если при этом $P \in \mathbb{P}_{(\hat{e})}$, $N \in \mathbb{N}_{(\hat{e})}$, то $e = \hat{e}$ и $P(A) < P(B) \iff N(A) < N(B)$, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Замечание 1.2. Первые публикации по п. 1.2, 1.3 — [19, 28, 65, 65, 66]. Шкала значений возможности и группа ее автоморфизмов в известных автору работах не используются. В «качественной» теории возможностей в [20] операции $\max$ и $\min$ постулируются, а возможность определена как в (5). В «количественной» теории возможностей [20, 42, 46] операции определены как $\max$ и обычное умножение, как во втором варианте теории возможностей [28]. В [9–12, 20, 42] постулируется $N(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - P(X \setminus A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Сравнительный анализ известных вариантов теории см. в [57].

1.4. Принцип относительности

Каждый автоморфизм $\gamma: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, $\hat{\gamma}: \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$, $\gamma, \hat{\gamma} \in \bar{\Gamma}$, определяет изоморфизм $\gamma: \mathcal{L} \rightarrow \gamma\mathcal{L}$, $\hat{\gamma}: \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \hat{\gamma}\hat{\mathcal{L}}$, где $\gamma\mathcal{L}$ и $\hat{\gamma}\hat{\mathcal{L}}$ суть шкалы, изоморфные соответственно $\mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{L}}$, элементы которых суть $\gamma(a)$ и $\hat{\gamma}(a)$, $a \in [0, 1]$, а операции $+$, $\times$ в $\gamma\mathcal{L}$ и $\hat{+}$, $\hat{\times}$ в $\hat{\gamma}\hat{\mathcal{L}}$ определены равенствами (4) и (6). Назовем шкалы $\gamma\mathcal{L}$ и $\hat{\gamma}\hat{\mathcal{L}}$ координатными представлениями² шкал $\mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{L}}$, $\gamma, \hat{\gamma} \in \bar{\Gamma}$, где $\bar{\Gamma}$ далее обозначает группу изоморфизмов.

• Поскольку все шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \bar{\Gamma}$, и все шкалы $\hat{\gamma}\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\gamma} \in \bar{\Gamma}$, взаимно изоморфны, то любой исследователь может выбрать любую пару шкал $\gamma\mathcal{L}$ и $\hat{\gamma}\hat{\mathcal{L}}$, $\gamma, \hat{\gamma} \in \bar{\Gamma}$, для формулировки нечеткой модели. Сформулированные в парах шкал $\mathcal{L}'$, $\hat{\mathcal{L}}'$ и $\mathcal{L}''$, $\hat{\mathcal{L}}''$

• модели считаются эквивалентными, если существует пара шкал $\mathcal{L} = \gamma'\mathcal{L}' = \gamma''\mathcal{L}''$, $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\gamma}'\hat{\mathcal{L}}' = \hat{\gamma}''\hat{\mathcal{L}}''$, $\gamma', \gamma'', \hat{\gamma}', \hat{\gamma}'' \in \bar{\Gamma}$, в которых их формулировки совпадают.

• Модели, формулировки которых не зависят от выбора шкал $\gamma\mathcal{L}$ и $\hat{\gamma}\hat{\mathcal{L}}$, т.е. одинаковы для

¹ Каждая функция $\theta(\cdot) \in \Theta$ определяет нечеткое отрицание: необходимость(A) = невозможность($\Omega \setminus A$).

² «Координаты» $a, \hat{a} \in [0, 1]$ в шкалах $\mathcal{L}$, $\hat{\mathcal{L}}$ заданы «координатами» $\gamma(a), \hat{\gamma}(\hat{a}) \in [0, 1]$ в $\gamma\mathcal{L}$, $\hat{\gamma}\hat{\mathcal{L}}$.

всех исследователей, могут быть содержательно истолкованы.

Этот аспект теории возможностей, аналогичный принципу относительности в физике, определил содержательную интерпретацию возможности и необходимости, математические методы и алгоритмы их эмпирического восстановления, математический формализм теории и области ее приложений [51].

Замечание 1.3. Первые публикации по пункту 1.4 — [26, 28, 70]. Автору неизвестны публикации, в которых дано подобное определение и содержательное толкование возможности. В отличие от моделей возможности в [8, 10–12], следующих схеме Л.Заде [2], названной в [20, 42] «количественной» теорией возможностей, в рассматриваемом варианте численные значения P и N , отличные от 0 и 1, как и в «качественной» теории возможностей [16, 17, 20], не важны, существенна лишь их упорядоченность. Рассматриваемый вариант отличается и от «качественной» теории возможностей, ибо в [26, 28], в отличие от [16, 17, 20], любые возможности $P(\cdot)$ и $P'(\cdot)$ эквивалентны, если $\exists \gamma(\cdot) \in \Gamma \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \gamma(P(A)) = P'(A)$. В п. 1.16 [51] рассмотрен вариант теории возможностей, в котором группа автоморфизмов шкал значений P и N выбрана как подгруппа $\bar{\Gamma}$, оставляющая неподвижными заданные интервалы в $[0, 1]$, в пределах которых значения P и N допускают содержательную интерпретацию.

2. Стохастическая модель возможности и необходимости. Нечеткие модели вероятности

2.1. P и N , согласованные с P_r

Для $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ согласно упорядоченностям (1), (2) и формулам (5) и (5*):

- $\forall A_1 \in \mathcal{P}(\Omega)$, если $\omega_1 \in A_1$, то $P(A_1) = p_1 = 1$, $P_r(A_1) \in \Delta_1 = [p_r, 1]$, где Δ_1 — минимальный (по включению) интервал, содержащий значение $P_r(A_1)$;
- $\forall A_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$, если $\omega_2 \in A_2$, $\omega_1 \notin A_2$, то $P(A_2) = p_2$, $P_r(A_2) \in \Delta_2 = [p_r, 1 - p_r]$, где Δ_2 — минимальный интервал, содержащий значение $P_r(A_2)$;
- $\forall A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$, если $\omega_i \in A_i$, $\omega_{i-1} \notin A_i$, $\dots$, $\omega_1 \notin A_i$, то $P(A_i) = p_i$, $P_r(A_i) \in \Delta_i = [p_r, 1 - p_r - \dots - p_{i-1}]$, где Δ_i — минимальный интервал, содержащий $P_r(A_i)$, $i = 3, 4, \dots$.

Следовательно, $\exists \check{\gamma}(\cdot) \in \check{\Gamma}(P_r) \subset \check{\Gamma} \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) P(A) = \check{\gamma}(P_r(A))$, где $\check{\Gamma}$ — класс монотонных функций $\check{\gamma}(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\check{\gamma}(0) = 0$, $\check{\gamma}(1) = 1$, а функция $\check{\gamma}(\cdot)$, определяющая согласованность P с P_r , удовлетворяет условиям: $\check{\gamma}(a) = p_i$, $a \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \dots$.

Определение 2.1. Возможность P максимально согласована с вероятностью P_r , если функция $\check{\gamma}(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ выбрана так, что $p_i > p_{i+1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \emptyset \Leftrightarrow \check{f}_i \stackrel{\text{def}}{=} p_r + \dots + p_{i-1} + 2p_r > 1$, и $p_i = p_{i+1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \emptyset \Leftrightarrow \check{f}_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots$;

далее $P_r \approx > P$ обозначает максимальную согласованность P с P_r .

По такой же схеме определяется и необходимость N , максимально согласованная с вероятностью P_r , $P_r \approx > N$, причем P и N , максимально согласованные с P_r , дуально согласованы, см. замечание 1.1.

2.2. Соответствие между классами нечетко эквивалентных вероятностей и классами эквивалентных возможностей

Теорема 2.1. Согласно п. 1.2 и определению 2.1,

- каждому классу взаимно эквивалентных возможностей $\mathbb{P}_{(e)}$ в (3) условиями

$$\begin{aligned} e_i = 1 &\Leftrightarrow p_i > p_{i+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p_r + \dots + p_{i-1} + 2p_r = \check{f}_i > 1, \\ e_i = 0 &\Leftrightarrow p_i = p_{i+1} \Leftrightarrow \check{f}_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

взаимно однозначно сопоставлен класс взаимно нечетко эквивалентных вероятностей $\mathbb{P}_{r(e)}$, удовлетворяющих условиям (1) и (9), а разбиению (3) класса $\mathbb{P}$ — разбиению класса $\mathbb{P}_r = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}_{r(e)}$,

$$\mathbb{P}_{r(e)} \cap \mathbb{P}_{r(e')} = \emptyset, \quad e \neq e', \quad e, e' \in (0, 1);$$

- $\forall P \in \mathbb{P}_{(e)}$ и $\forall P_r \in \mathbb{P}_{r(e)}$ существует монотонно неубывающая непрерывная на $(0, 1]$, зависящая от P_r функция $\gamma_e(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такая, что

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i: \omega_i \in A} p_i = \gamma_e \left(\sum_{i: \omega_i \in A} p_r \right) = \gamma_e(P_r(A)); \\ \sup_{i: \omega_i \in A} \gamma_e(p_r) &= \gamma_e \left(\sum_{i: \omega_i \in A} p_r \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Класс $\check{\Gamma}(P_r)$ функций $\gamma_e(\cdot)$ определяется вероятностью $P_r \in \mathbb{P}_{r(e)}$, $e \in (0, 1)$.

Доказательство следует непосредственно из определения 2.1 (см. рисунок).

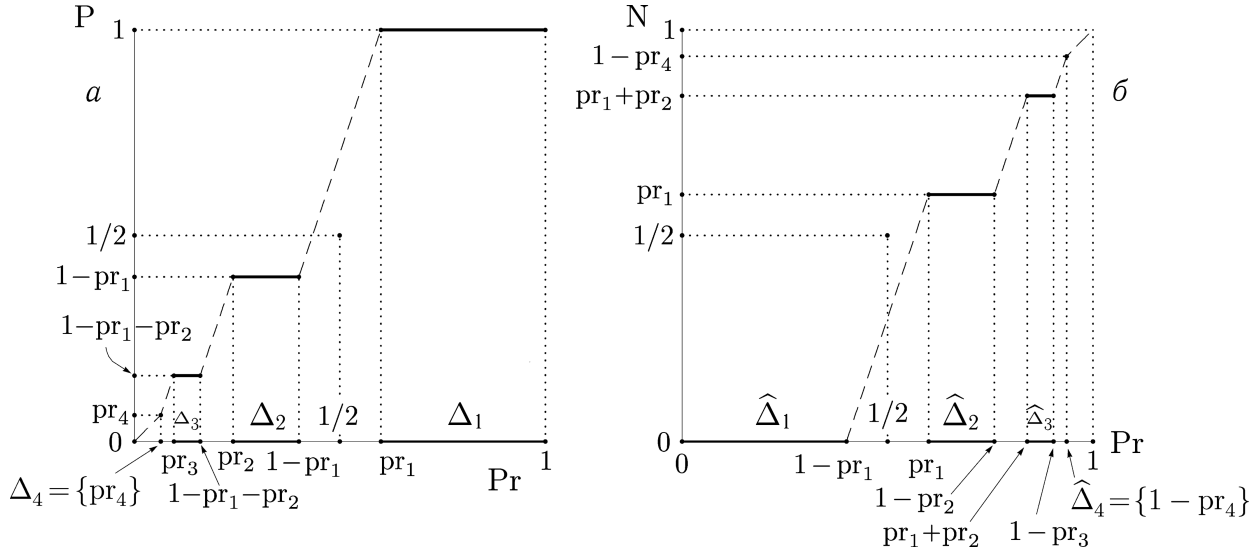
Следствие 2.1. Согласно замечанию 1.2 из условий $P_r \approx > P$, $P_r \approx > N$, $P_r \in \mathbb{P}_{r(e)}$ следует, что $P \in \mathbb{P}_{(e)}$, $N \in \mathbb{N}_{(e)}$ и $\exists \gamma_e(\cdot) \in \check{\Gamma}(P_r)$, $\exists \theta_e(\cdot) \in \check{\Theta}(P_r) \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{aligned} P(A) &= \gamma_e(P_r(A)), \quad N(A) = \theta_e(P_r(\Omega \setminus A)), \\ \check{\Theta}(P_r) &= \theta \check{\Gamma}(P_r), \quad \theta(\cdot) \in \Theta, \end{aligned} \quad (11)$$

т.е. любая вероятность $P_r \in \mathbb{P}_{r(e)}$ определяет вероятностную модель (11) любых $P \in \mathbb{P}_{(e)}$ и $N \in \mathbb{N}_{(e)}$, последние называются P_r -измеримыми и определяют нечеткую модель любой из вероятностей $P_r \in \mathbb{P}_{r(e)} = \{P_r \in \mathbb{P}_r, \sup_{i: \omega_i \in A} \gamma_e(p_r) =$

$= \gamma_e \left(\sum_{i: \omega_i \in A} p_r \right), A \in \mathcal{P}(\Omega)\}$, которые называются взаимно нечетко эквивалентными.

Следующий пример свидетельствует, что возможность, даже максимально согласованная с веро-



Взаимно однозначные соответствия: a — между значениями P ($p_1 = 1$, $p_2 = 1 - pr_1$, $p_3 = 1 - pr_1 - pr_2$, $p_4 = pr_4$) и минимальными интервалами, содержащими значения Pr в п. 2.1. Штриховые линии, соединяющие области постоянных значений возможности, дополняют их до графика функции γ_e ; b — между значениями N ($n_1 = 0$, $n_2 = pr_1$, $n_3 = pr_1 + pr_2$, $n_4 = 1 - pr_4$) и минимальными интервалами, содержащими значения Pr , для $\theta(a) = 1 - a$, $a \in [0, 1]$; $pr_i = q/(1 + q)^i$, $i = 1, 2, 3$, $pr_4 = 1/(1 + q)^3$, $q = 3/2$

яностью, передает лишь значительные изменения вероятностей: если $pr_i = q/(1 + q)^i$, $i = 1, 2, \dots$, то $\forall i = 1, 2, \dots$, согласно (9), либо $f_i \leq 1$ и $e_i = 0$, если $0 < q \leq 1$, либо $f_i > 1$ и $e_i = 1$, если $q > 1$, т.е. возможность не «реагирует» на «недостаточно быстрое» убывание вероятностей элементарных событий.

Замечание 2.1. Первые публикации по п. 2 — [28, 31]. В [31, 51] связи возможности, необходимости и вероятности существенно отличаются как от связей в «качественной» теории возможностей (где их нет), так и от связей в «количественной» теории возможностей, где *возможность интерпретируется* как верхняя вероятность, а *необходимость* — как нижняя вероятность [20, 25, 29, 42, 50]. Другие связи вероятности и возможности рассмотрены в [57, п. 9.5.2]. Связи возможности и случайного множества рассмотрены в [28, гл. 5, § 3], [74, 75].

3. Событийно-частотная интерпретация и эмпирическое восстановление $Pr_1, \dots, Pr_k$ -измеримых P и N

Пусть в стохастической модели $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Pr_1) \times \dots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Pr_n)$ последовательности n взаимно независимых испытаний вероятность может произвольно изменяться от испытания к испытанию, причем среди $Pr_1, Pr_2, \dots$ конечное число k различных вероятностей, скажем, $Pr^1 \in \mathbb{P}, \dots, Pr^k \in \mathbb{P}$, тогда в (2)

$$Pr^{(n)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Pr_i(A) = \sum_{s=1}^k (n_s/n) Pr^s(A), \quad (12)$$

где n_s/n — частота, с которой вероятность Pr^s встречается в последовательности $Pr_1, \dots, Pr_n$,

$s = 1, \dots, k$, $n_1/n + \dots + n_k/n = 1$. Если в (12) с увеличением n частоты n_s/n , $s = 1, \dots, k$, изменяются произвольно, то значение $Pr^{(n)}(A)$ произвольно «блуждает» в пределах интервала $[\min_{1 \leq s \leq k} Pr^s(A), \max_{1 \leq s \leq k} Pr^s(A)]$ и за ним при $n \rightarrow \infty$ согласно УЗБЧ (2) все более точно следует частота $\nu^{(n)}(A)$. В этом случае знание вероятностей $Pr^1(A), \dots, Pr^k(A)$ не позволяет оценить частоту $\nu^{(n)}(A)$, а наблюдение за $\nu^{(n)}(A)$, $n = 1, 2, \dots$, не позволяет восстановить стохастическую модель испытаний.

3.1. Событийно-частотная интерпретация $Pr^1, \dots, Pr^k$ -измеримых возможности и необходимости

Если $Pr^1, \dots, Pr^k$ взаимно нечетко эквивалентны, т.е. если $\exists e \in (0, 1)$: $Pr^1, \dots, Pr^k \in \mathbb{P}_{(e)}$, то $\forall P \in \mathbb{P}_{(e)}$ и $\forall N \in \mathbb{N}_{(e)}$, которые называются $Pr^1, \dots, Pr^k$ -измеримыми, можно дать событийно-частотную интерпретацию, согласно которой $\exists N$: $\forall n > N$ $P(A) > P(B) \Leftrightarrow N(A) > N(B) \Rightarrow \nu^{(n)}(A) \stackrel{n.н.}{>} \nu^{(n)}(B)$.

Теорема 3.1. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ и $\exists e \in (0, 1)$ $Pr^1, \dots, Pr^k \in \mathbb{P}_{(e)}$. Тогда $\forall P \in \mathbb{P}_{(e)}$ $\forall N \in \mathbb{N}_{(e)}$ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\exists N \forall n > N$ $P(A) > P(B) \Leftrightarrow N(A) > N(B) \Rightarrow \nu^{(n)}(A) \stackrel{n.н.}{>} \nu^{(n)}(B)$.

Доказательство. Согласно (11) $\forall s = 1, \dots, k$ $\exists \gamma_e^s(\cdot) \in \tilde{\Gamma}(Pr^s)$ $\exists \theta_e^s(\cdot) \in \tilde{\Theta}(Pr^s)$ $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) = \gamma_e^1(Pr^1(A)) = \dots = \gamma_e^k(Pr^k(A))$, $N(A) = \theta_e^1(Pr^1(\Omega \setminus A)) = \dots = \theta_e^k(Pr^k(\Omega \setminus A))$. Поэтому $P(A) > P(B) \Leftrightarrow N(A) > N(B) \Rightarrow \forall s = 1, \dots, k$ $Pr^s(A) > Pr^s(B) \Rightarrow \forall n = 1, 2, \dots$ $Pr^{(n)}(A) > Pr^{(n)}(B)$ и, следовательно, $\exists N \forall n > N$ $P(A) > P(B) \Leftrightarrow N(A) > N(B) \Rightarrow \nu^{(n)}(A) \stackrel{n.н.}{>} \nu^{(n)}(B)$. $\square$

3.2. Нечеткое моделирование вероятностной случайности

Покажем, что при условии регулярности вероятностей $\text{Pr}^1, \dots, \text{Pr}^k$ может быть восстановлена нечеткая модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{P}, \text{N})$, $\text{Pr}^s \approx > \text{P}$, $\text{Pr}^s \approx > \text{N}$, $s = 1, \dots, k$, каждого испытания, причем безошибочно и на основе конечного числа испытаний.

Теорема 3.2. Если $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, вероятности $\text{Pr}^1, \dots, \text{Pr}^k$ удовлетворяют условиям регулярности

$$\text{pr}_i^s > 0, \quad f_i^s = \text{pr}_1^s + \dots + \text{pr}_{i-1}^s + 2\text{pr}_i^s \neq 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ \text{pr}_1 + \dots + \text{pr}_m = 1, \quad s = 1, \dots, k, \quad (13)$$

где $\text{pr}_i^s = \text{Pr}^s(\{\omega_i\})$, и для некоторого $e \in (0, 1)$ $\text{Pr}^s \in \mathbb{P}_{(e)}$, $s = 1, \dots, k$, то данные п.н. конечного числа испытаний позволяют безошибочно восстановить класс взаимно эквивалентных нечетких моделей $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{P}, \text{N})$, $\text{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $\text{N} \in \mathbb{N}_{(e)}$, каждого испытания.

Доказательство. Так как согласно условиям теоремы $\forall i = 1, \dots, m$ либо $\forall s = 1, \dots, k$ $f_i^s > 1$, либо $\forall s = 1, \dots, k$ $f_i^s < 1$, то $f_i^{(n)} = \sum_{s=1}^k (n_s/n) f_i^s > 1 \Leftrightarrow \forall s = 1, \dots, k$ $f_i^s > 1 \Leftrightarrow e_i = 1$, $f_i^{(n)} < 1 \Leftrightarrow \forall s = 1, \dots, k$ $f_i^s < 1 \Leftrightarrow e_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, а так как $f_i^{(n)} = \sum_{s=1}^k (n_s/n) f_i^s = \sum_{s=1}^k (n_s/n) (\text{pr}_1^s + \dots + \text{pr}_{i-1}^s + 2\text{pr}_i^s) = \text{pr}_1^{(n)} + \dots + \text{pr}_{i-1}^{(n)} + 2\text{pr}_i^{(n)}$, где $\text{pr}_i^{(n)} = \sum_{s=1}^k (n_s/n) \text{pr}_i^s$, $i = 1, \dots, m$, $n = 1, 2, \dots$, то в силу УЗБЧ $\nu_i^{(n)} - \text{pr}_i^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$, где $\nu_i^{(n)} = \sum_{s=1}^k (n_s/n) \nu_i^{n_s}$ — частота события $\{\omega_i\}$, $\nu_i^{n_s}$ — (ненаблюдаемая) частота тех $\{\omega_i\}$, $i = 1, \dots, m$, которые контролировались вероятностью Pr^s , $s = 1, \dots, k$. Поэтому $(\varphi_i^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \dots + \nu_{i-1}^{(n)} + 2\nu_i^{(n)}) - (\text{pr}_1^{(n)} + \dots + \text{pr}_{i-1}^{(n)} + 2\text{pr}_i^{(n)}) = f_i^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$ и, следовательно, $\exists N \quad \forall n > N \quad f_i^{(n)} > 1 \Leftrightarrow e_i = 1 \Rightarrow \varphi_i^{(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1$, $f_i^{(n)} < 1 \Leftrightarrow e_i = 0 \Rightarrow \varphi_i^{(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$, т.е. наблюдаемые значения $\varphi_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, m$, позволяют безошибочно восстановить значение e . $\square$

Замечание 3.1. Уточним сказанное о вероятностном и о возможностном моделировании СТ.О. в п. 1.2. Согласно теореме 3.2 нечеткая модель СТ.О. может быть восстановлена точно и на основе конечного числа наблюдений, если выполнены условия (13), и вероятности $\text{Pr}^s \in \mathbb{P}_{(e)}$, $s = 1, \dots, k$, изменяются в пределах некоторого класса $\mathbb{P}_{(e)}$, при этом вероятностная модель СТ.О. восстанавли-

вается лишь с точностью до включения в класс $\mathbb{P}_{(e)} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr}), \text{Pr} \in \mathbb{P}_{(e)}\}$ нечетко эквивалентных моделей.

В следующей теореме дан алгоритм восстановления нечеткой модели испытаний.

Теорема 3.3. [45] Пусть выполнены условия теоремы 3.2 и для всех $i = 1, \dots, m$

- 1) если $\varphi_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n)}$, то считать $e_i = 1$,
 - 2) если $\varphi_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n)}$, то считать $e_i = 0$,
 - 3) если $|\varphi_i^{(n)} - 1| \leq \delta^{(n)}$,
- то продолжить испытания, $n = 1, 2, \dots$,

где $\varphi_i^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \dots + \nu_{i-1}^{(n)} + 2\nu_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, m$, $\delta^{(n)} = (\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha})^{1/2}$, $n = 1, 2, \dots$, α — верхняя граница вероятности ошибочных решений 1, 2. Тогда условие 3 выполняется для п.н. конечного числа испытаний, и алгоритм (14) восстанавливает $e = 0.e_1 \dots e_m$, совпадающее с его истинным значением с вероятностью $\geq 1 - m\alpha$.

Доказательство. Воспользовавшись неравенством Хефдинга¹, оценим вероятности ошибочных решений 1) $\text{Pr}^{(n)}(\varphi_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n)} \mid f_i^{(n)} < 1) \leq \text{Pr}^{(n)}(\varphi_i^{(n)} - f_i^{(n)} > \delta^{(n)} \mid f_i^{(n)} < 1) \leq \exp(-n(\delta^{(n)})^2/2) = \alpha$, 2) $\text{Pr}^{(n)}(\varphi_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n)} \mid f_i^{(n)} > 1) \leq \text{Pr}^{(n)}(\varphi_i^{(n)} - f_i^{(n)} < -\delta^{(n)} \mid f_i^{(n)} > 1) \leq \exp(-n(\delta^{(n)})^2/2) = \alpha$, и при заданной их верхней границе α определим $\delta^{(n)} = (\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha})^{1/2}$, $n = 1, 2, \dots$. Покажем, что условие 3 продолжения испытаний выполняется для п.н. конечного их числа. Согласно условиям теоремы 3.2, так как либо $\forall s \quad f_i^s < 1$, либо $\forall s \quad f_i^s > 1$, то $\exists \varepsilon > 0 \quad \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq s \leq k}} |f_i^s - 1| > 2\varepsilon \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq m} |f_i^{(n)} - 1| = \min_{1 \leq i \leq m} \sum_{s=1}^k \frac{n_s}{n} |f_i^s - 1| > 2\varepsilon \Rightarrow \text{Pr}^{(n)}(|\varphi_i^{(n)} - 1| \leq \delta^{(n)} \mid |f_i^{(n)} - 1| > \varepsilon) \leq 2 \exp(-n\varepsilon^2/2)$, $n = 1, 2, \dots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \text{Pr}^{(n)}(|\varphi_i^{(n)} - 1| \leq \delta^{(n)}) < \infty$, т.е. согласно лемме Бореля–Кантелли условие 3 выполняется для п.н. конечного числа испытаний. $\square$

Замечание 3.2. Первые публикации по п. 3 — [31, 35, 45], где приведены математические методы и адаптивные алгоритмы, с гарантированной точностью восстанавливающие Pr -измеримую возможность, причем и в том случае, когда вероятность изменяется от испытания к испытанию, оставаясь в пределах некоторого класса нечетко эквивалентных вероятностей. В [43, 44] рассмотрены интервальные методы эмпирического восстановления возможности как верхней вероятности.

¹ Лемма Хефдинга [58]. Если случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ взаимно независимы и $\text{Pr}(a_k \leq \xi_k \leq b_k) = 1$, $k = 1, \dots, n$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \text{Pr}(\zeta_n - \mathbb{E}\zeta_n > n\varepsilon) \leq \exp(-2n^2\varepsilon^2 / \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2)$, где $\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

4. Математические основы теории возможностей

4.1. р- и п-интегралы, Р- и N-меры

Обозначим $\mathcal{L}(X)$, $\widehat{\mathcal{L}}(X)$ классы функций $g(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L}$, $\widehat{g}(\cdot): X \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ с бинарными операциями $(g_1 * g_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g_1(x) * g_2(x)$, $x \in X$, $(\widehat{g}_1 \widehat{*} \widehat{g}_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{g}_1(x) \widehat{*} \widehat{g}_2(x)$, $x \in X$, где $*$ и $\widehat{*}$ — любые из операций $+$, $\times$ и $\widehat{+}$, $\widehat{\times}$. Далее $\mathcal{L}(X)$ и $\widehat{\mathcal{L}}(X)$ суть классы всех функций $X \rightarrow [0, 1]$ с операциями $+$, $\times$ и $\widehat{+}$, $\widehat{\times}$ и отношениями $\leq$ и $\widehat{\leq}$, X — произвольное множество, $\mathcal{P}(X)$ — класс всех его подмножеств.

Определение 4.1. Определим р- и п-интегралы как функции $p(\cdot): \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}$ и $n(\cdot): \widehat{\mathcal{L}}(X) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$,

- однородные: $\forall a \in \mathcal{L} \quad \forall g(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L} \quad p((a \times g)(\cdot)) = a \times p(g(\cdot))$, $\forall \widehat{a} \in \widehat{\mathcal{L}} \quad \forall \widehat{g}(\cdot): X \rightarrow \widehat{\mathcal{L}} \quad n((\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{g})(\cdot)) = \widehat{a} \widehat{\times} n(\widehat{g}(\cdot))$,
- вполне аддитивные: $\forall g_j(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L}, j \in J, p((\bigoplus_{j \in J} g_j)(\cdot)) = \bigoplus_{j \in J} p(g_j(\cdot))$, $\forall \widehat{g}_j(\cdot): X \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}, j \in J, n((\bigoplus_{j \in J} \widehat{g}_j)(\cdot)) = \bigoplus_{j \in J} n(\widehat{g}_j(\cdot))$, где J — произвольное множество индексов.

Определим меры $P(\cdot): \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{L}$ и $N(\cdot): \mathcal{P}(X) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ равенствами: $\forall E \in \mathcal{P}(X) \quad P(E) \stackrel{\text{def}}{=} p(\chi_E(\cdot))$ и $N(E) \stackrel{\text{def}}{=} n(\widehat{\chi}_E(\cdot))$, где $\chi_E(x) = 1, x \in E, \chi_E(x) = 0, x \notin E, x \in X, \widehat{\chi}_E(\cdot) = \theta \circ \chi_{X \setminus E}(\cdot) = \chi_E(\cdot), \theta(\cdot) \in \Theta$.

Теорема 4.1. $\forall p(\cdot): \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L} \quad \exists s(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L} \quad \forall g(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L}$

$$p(g(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min\{s(x), g(x)\} \equiv \bigoplus_{x \in X} (s(x) \times g(x)) \stackrel{\text{def}}{=} p_s(g(\cdot)), \quad (15)$$

$$\forall n(\cdot): \widehat{\mathcal{L}}(X) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}} \quad \exists \widehat{s}(\cdot): X \rightarrow \widehat{\mathcal{L}} \quad \forall \widehat{g}(\cdot): X \rightarrow \widehat{\mathcal{L}} \\ n(\widehat{g}(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max\{\widehat{s}(x), \widehat{g}(x)\} \equiv \bigoplus_{x \in X} (\widehat{s}(x) \widehat{\times} \widehat{g}(x)) \stackrel{\text{def}}{=} n_{\widehat{s}}(\widehat{g}(\cdot)), \quad (16)$$

где $s(x) = p_s(\chi_{\{x\}}(\cdot)) = P_s(\{x\})$, $\widehat{s}(x) = n_{\widehat{s}}(\widehat{\chi}_{X \setminus \{x\}}(\cdot)) = N_{\widehat{s}}(X \setminus \{x\})$, $x \in X$, суть распределения $P_s, N_{\widehat{s}}$.

Доказательство. Для любых функций $g(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L}$, $\widehat{g}(\cdot): X \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ имеют место «интегральные представления»:

$$g(x) = \sup_{y \in X} \min\{g(y), \chi_{\{y\}}(x)\} \equiv \bigoplus_{y \in X} (g(y) \times \chi_{\{y\}}(x)) = p_{\chi_{\{x\}}}(g(\cdot)), \quad x \in X, \\ \widehat{g}(x) = \inf_{y \in X} \max\{\widehat{g}(y), \widehat{\chi}_{X \setminus \{y\}}(x)\} \equiv \bigoplus_{y \in X} (\widehat{g}(y) \widehat{\times} \widehat{\chi}_{X \setminus \{y\}}(x)) = n_{\widehat{\chi}_{X \setminus \{x\}}}(\widehat{g}(\cdot)), \quad x \in X,$$

и в силу однородности и полной аддитивности р- и п-интегралов $p(g(\cdot)) = \bigoplus_{y \in X} (g(y) \times p(\chi_{\{y\}}(\cdot))) \equiv$

$$\equiv \bigoplus_{y \in X} (g(y) \times s(y)) \stackrel{\text{def}}{=} p_s(g(\cdot)), \text{ где } s(y) = p(\chi_{\{y\}}(\cdot)) = p_s(\chi_{\{y\}}(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} P_s(\{y\}), \quad y \in X; \quad n(\widehat{g}(\cdot)) = \bigoplus_{y \in X} (\widehat{g}(y) \widehat{\times} n(\widehat{\chi}_{X \setminus \{y\}}(\cdot))) \equiv \bigoplus_{y \in X} (\widehat{g}(y) \times \widehat{s}(y)) \stackrel{\text{def}}{=} n_{\widehat{s}}(\widehat{g}(\cdot)), \text{ где } \widehat{s}(y) = n(\widehat{\chi}_{X \setminus \{y\}}(\cdot)) = n_{\widehat{s}}(\widehat{\chi}_{X \setminus \{y\}}(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} N_{\widehat{s}}(X \setminus \{y\}), \quad y \in X. \quad \square$$

Замечание 4.1. Если в теореме 4.1 $\mathcal{L} \rightarrow \gamma\mathcal{L}$, то $p_s(g(\cdot)) \rightarrow p_{\gamma \circ s}(\gamma \circ g(\cdot)) = \gamma(p_s(g(\cdot)))$ и, согласно принципу относительности, интегралы $p_s(g(\cdot))$ и $p_{\gamma \circ s}(\gamma \circ g(\cdot))$ взаимно эквивалентны. Если же, следуя определению 4.1, рассматривать интеграл $p_s(\cdot)$ как функцию $\mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}$, то его преобразование как функции при неизменном аргументе $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$: $p_s(g(\cdot)) \rightarrow \gamma * p_s(g(\cdot)) = \gamma(p_s(\gamma^{-1} \circ g(\cdot))) = p_{\gamma \circ s}(g(\cdot))$.

Следствие 4.1.

- Эвристические определения (5) и (8) следуют из определения 4.1: $\forall E \in \mathcal{P}(X)$

$$P(E) = p_s(\chi_E(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} P_s(E) = \bigoplus_{x \in E} s(x), \quad (17) \\ N(E) = n_{\widehat{s}}(\widehat{\chi}_E(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} N_{\widehat{s}}(E) = \bigoplus_{x \in X \setminus E} \widehat{s}(x).$$

- р- и п-интегралы (15) и (16) суть интегралы Лебега и Сугено [6] относительно мер P (5) и N (8) [28, 51].

- Меры P_s и $N_{\widehat{s}}$ (17) вполне аддитивны: $P_s(\bigcup_{j \in J} E_j) \stackrel{\text{def}}{=} p_s(\chi_{\bigcup_{j \in J} E_j}(\cdot)) \equiv p_s((\bigoplus_{j \in J} \chi_{E_j})(\cdot)) = \bigoplus_{j \in J} P_s(E_j)$, $N_{\widehat{s}}(\bigcap_{j \in J} E_j) \stackrel{\text{def}}{=} n_{\widehat{s}}(\widehat{\chi}_{\bigcap_{j \in J} E_j}(\cdot)) \equiv n_{\widehat{s}}((\bigoplus_{j \in J} \widehat{\chi}_{E_j})(\cdot)) = \bigoplus_{j \in J} N_{\widehat{s}}(E_j)$, где J — произвольное множество индексов, и

- полунепрерывны: если $A = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, то $P_s(A) \leq \sup_N \inf_{n \geq N} P_s(A_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} P_s(A_n)$ (полунепрерывны снизу), $N_{\widehat{s}}(A) \geq \inf_N \sup_{n \geq N} N_{\widehat{s}}(A_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} N_{\widehat{s}}(A_n)$ (полунепрерывны сверху); причем если $A = X$, то $1 = P_s(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_s(A_n)$, если $A = \emptyset$, то $0 = N_{\widehat{s}}(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\widehat{s}}(A_n)$.

Соответствия между классами нечетко эквивалентных математических ожиданий и классами взаимно эквивалентных р- и п-интегралов

Обозначим: $p_A(g) = \bigoplus_{i: \omega_i \in A} (p_i \times g_i) = \bigoplus_{i: \omega_i \in \Omega} (p_i \times g_i \times \chi_{A,i})$ р-интеграл по множеству $A \subset \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, где $p_i = P(\{\omega_i\})$, $g_i = g(\omega_i)$, $\chi_{A,i} = 1, \omega_i \in A, \chi_{A,i} = 0, \omega_i \in \Omega \setminus A, \omega_i \in \Omega$; $E_A(f) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i \cdot f_i = \sum_{i: \omega_i \in \Omega} p_i \cdot f_i \cdot \chi_{A,i}$ — математическое ожидание на множестве $A \in \Omega$ случайной величины $f(\cdot): \Omega \rightarrow [0, \infty)$, где $f_i = f(\omega_i)$, $p_i = \Pr(\{\omega_i\})$, $\omega_i \in \Omega$. Пусть $u_i = p_i \times g_i$,

$v_i = \text{pr}_i \cdot f_i$, $i = 1, 2, \dots$, и подобно (2), (1) $1 = u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq 0$, $v \geq v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq 0$, $v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i < \infty$, $\mathbf{p}$ — класс р-интегралов $\mathbf{p}_A(\cdot)$, $A \subset \Omega$, $\mathbf{E}$ — класс математических ожиданий $\mathbf{E}_A(\cdot)$, $A \subset \Omega$, $e = 0, e_1 e_2 \dots \in (0, 1)$ — двоичное число, определяющее конкретную упорядоченность: $e_i = 1$, если $u_i > u_{i+1}$, $e_i = 0$, если $u_i = u_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, $\mathbf{p}_{(e)}$ — класс взаимно эквивалентных р-интегралов (см. замечание 4.1), $\mathbf{p} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbf{p}_{(e)}$, $\mathbf{p}_{(e)} \cap \mathbf{p}_{(e')} = \emptyset$, $e \neq e'$. Определим классы $\mathcal{P}_i(\Omega) \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots$, подмножеств $\mathcal{P}(\Omega)$: $\mathcal{P}_1(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), \omega_1 \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{P}_1(\Omega)$ $\mathbf{p}_A(g.) = u_1 = 1$, $\mathbf{E}_A(f.) \in [v_1, v] = \Delta_1$, где Δ_1 — минимальный по включению интервал, содержащий $\mathbf{E}_A(f.)$, $\mathcal{P}_2(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), \omega_1 \notin A, \omega_2 \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ $\mathbf{p}_A(g.) = u_2$, $\mathbf{E}_A(f.) \in [v_2, v - v_1] = \Delta_2$, где Δ_2 — минимальный по включению интервал, содержащий $\mathbf{E}_A(f.)$, $\dots$, $\mathcal{P}_i(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), \omega_1 \notin A, \dots, \omega_{i-1} \notin A, \omega_i \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{P}_i(\Omega)$ $\mathbf{p}_A(g.) = u_i$, $\mathbf{E}_A(f.) \in [v_i, v - (v_1 + \dots + v_{i-1})] = \Delta_i$, где Δ_i — минимальный интервал, содержащий значения $\mathbf{E}_A(f.)$, $i = 3, 4, \dots$; очевидно, что $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}_1(\Omega) \cup \mathcal{P}_2(\Omega) \cup \dots \cup \mathcal{P}_i(\Omega) \cup \dots$, $\mathcal{P}_i(\Omega) \cap \mathcal{P}_j(\Omega) = \emptyset$, $i \neq j$.

Определим функцию $\gamma_e(\cdot): [0, v] \rightarrow [0, 1]$, непрерывную на $(0, v]$, $\gamma_e(0) = 0$, $\gamma_e(v) = 1$, монотонную, удовлетворяющую условиям: $\gamma_e(a) = u_i$, $a \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \dots$, причем так, чтобы

$$\begin{aligned} e_i = 1 &\Leftrightarrow u_i > u_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_1 + \dots + v_{i-1} + 2v_i > v, \\ e_i = 0 &\Leftrightarrow u_i = u_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_1 + \dots + v_{i-1} + 2v_i \leq v, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (*)$$

Так определенная функция $\gamma_e(\cdot)$ устанавливает однозначное соответствие между классом $\mathbf{p}_{(e)}$ эквивалентных р-интегралов и классом $\mathbf{E}_{(e)}$ нечетко эквивалентных математических ожиданий, $e \in (0, 1)$, а именно, согласно (*) $\exists \gamma_e(\cdot): [0, v] \rightarrow [0, 1]$ $\forall A \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_A(g.) &= \bigoplus_{i: \omega_i \in A} (\mathbf{p}_i \times g_i) = \gamma_e \left(\sum_{i: \omega_i \in A} \text{pr}_i \cdot f_i \right) = \\ &= \gamma_e(\mathbf{E}_A(f.)). \end{aligned} \quad (18)$$

В частности, если $A = \{\omega_i\}$, то, согласно (18), $\mathbf{p}_i \times g_i = \gamma_e(\text{pr}_i \cdot f_i)$ и $\bigoplus_{i: \omega_i \in A} (\gamma_e(\text{pr}_i \cdot f_i)) = \gamma_e(\sum_{i: \omega_i \in A} \text{pr}_i \cdot f_i)$, а как следствие получим равенства (10): если $g(\omega_i) = f(\omega_i) = \chi_{A,i}$, $i = 1, 2, \dots$, — индикатор $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots\}$, $u_{i_1} \geq u_{i_2} \geq \dots$,

$v_{i_1} \geq v_{i_2} \geq \dots$, $u_{i_1} = \text{pr}_{i_1}$, $u_{i_2} = \text{pr}_{i_2}, \dots, v_{i_1} = \text{pr}_{i_1}$, $v_{i_2} = \text{pr}_{i_2}, \dots$, то, согласно (18), $\mathbf{p}_A(g.) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{E}_A(f.) = \text{Pr}(A)$, $\mathbf{P}(A) = \gamma_e(\text{Pr}(A))$, $A \subset \Omega$.

Обозначим $\mathbf{p}_A(\widehat{g}.) = \bigoplus_{i: \omega_i \in \Omega} (\widehat{\mathbf{p}}_i \times \widehat{g}_i \times \widehat{\chi}_{A,i}) = \bigoplus_{i: \omega_i \in \Omega \setminus A} (\widehat{\mathbf{p}}_i \times \widehat{g}_i)$ п-интеграл по A , где $\widehat{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i = \theta(\text{pr}_i)$, $\widehat{g}_i = \theta(g_i)$ (см. замечание 1.1), $\widehat{\chi}_{A,i} = \chi_{A,i}$. Так как $\mathbf{p}_A(\widehat{g}.) = \bigoplus_{i: \omega_i \in \Omega \setminus A} \widehat{u}_i = \theta\left(\bigoplus_{i: \omega_i \in \Omega \setminus A} u_i\right) = \theta(\mathbf{p}_{\Omega \setminus A}(g.))$, где $\widehat{u}_i = \widehat{\mathbf{p}}_i \times \widehat{g}_i = \theta(\text{pr}_i \times g_i) = \theta(u_i)$, $i = 1, 2, \dots$, то функция $\theta_e(\cdot) = \theta \circ \gamma_e(\cdot): [0, v] \rightarrow [0, 1]$, согласно (18), определяет взаимно однозначное соответствие: $\forall A \subset \Omega$ $\mathbf{p}_A(\widehat{g}.) = \theta_e\left(\sum_{i: \omega_i \in \Omega \setminus A} \text{pr}_i f_i\right) = \theta_e(\mathbf{E}_{\Omega \setminus A}(f.))$ между классом $\mathbf{p}_{(e)}$ взаимно эквивалентных п-интегралов и классом $\mathbf{E}_{(e)}$ взаимно нечетко эквивалентных математических ожиданий, $e \in (0, 1)$.

Замечание 4.2. Первые публикации по п. 4.1 — [19, 28, 66], где, в отличие от [6, 15], интегралы определены как интегралы Лебега, но, как показано в [51], им эквивалентны. Работы, в которых рассмотрены связи между математическим ожиданием и р-, п-интегралами, автору неизвестны.

4.2. Нечеткий элемент, нечеткое множество

Нечеткий элемент (нч.э.) η определим как канонический¹ для нечеткого пространства $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathbf{P}_Y, \mathbf{N}_Y)$, задав распределения возможностей $g^\eta(y) = \mathbf{P}_Y(\{y\}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}^\eta(\eta = y)$ и необходимостей $\widehat{g}^\eta(y) = \mathbf{N}_Y(Y \setminus \{y\}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{N}^\eta(\eta \neq y)$, $y \in Y$, его значений, поскольку, согласно (17), $\forall B \in \mathcal{P}(Y)$

$$\mathbf{P}_Y(B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}^\eta(\eta \in B) = \text{pr}_{g^\eta}(\chi_B(\cdot)) = \bigoplus_{y \in B} g^\eta(y), \quad (19)$$

$$\mathbf{N}_Y(B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{N}^\eta(\eta \in B) = \text{pr}_{\widehat{g}^\eta}(\widehat{\chi}_B(\cdot)) = \bigoplus_{y \in Y \setminus B} \widehat{g}^\eta(y),$$

где $\widehat{\chi}_B(\cdot) = \theta \circ \chi_{Y \setminus B}(\cdot)$, и согласно (15) и (16) р- и п-интегралы pr_{g^η} и $\text{pr}_{\widehat{g}^\eta}$ относительно мер $\mathbf{P}_Y$ и $\mathbf{N}_Y$ суть $\text{pr}_{g^\eta}(f(\cdot)) = \bigoplus_{y \in Y} (g^\eta(y) \times f(y))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(Y)$,

$$\text{pr}_{\widehat{g}^\eta}(\widehat{f}(\cdot)) = \bigoplus_{y \in Y} (\widehat{g}^\eta(y) \times \widehat{f}(y)), \quad \widehat{f}(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(Y).$$

*Нечетким множеством*² (нч.м.), определенным на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathbf{P}_Y, \mathbf{N}_Y)$, со значениями в $\mathcal{P}(X)$, назовем образ A^η нч.э. η при многозначном отображении $A: Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Одной из основных характеристик A^η являются его индикаторные функции одноточечного покрытия (и.ф.о.п.)

$$\begin{aligned} g^{A^\eta}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}^\eta(x \in A^\eta) \equiv \mathbf{P}^\eta(\eta \in A_x), \quad g^{A^\eta}(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \\ \widehat{g}^{A^\eta}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{N}^\eta(x \in A^\eta) \equiv \mathbf{N}^\eta(\eta \in A_x), \quad \widehat{g}^{A^\eta}(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X), \end{aligned} \quad (20)$$

¹ Нч.э. η со значениями в $(Y, \mathcal{P}(Y))$, определяющий $\mathbf{P}_Y$ и $\mathbf{N}_Y$ в (19), называется каноническим для $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathbf{P}_Y, \mathbf{N}_Y) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathbf{P}^\eta, \mathbf{N}^\eta)$, последнее называется его моделью. Нч.э. — аналог случайного элемента в теории вероятностей.

² Нч.м. — аналог случайного множества в теории вероятностей и альтернатива нч.м. в теории возможностей Заде [2, 12].

определяющие возможность и необходимость покрытия $x \in X$ нч.м. A^η ; в (20) $A: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, $A_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y, x \in A^y\}$, $x \in X$, — отображение, обратное A^y , $y \in Y$ [51].

Поскольку $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)$, $(A \cup B)_* = (A_* \cup B_*)$, то, как и для функций принадлежности Заде [2], $g^{(A \cup B)^\eta}(x) = g^{A^\eta \cup B^\eta}(x) = P^\eta(\eta \in A_x \cup B_x) = P^\eta(\eta \in A_x) + P^\eta(\eta \in B_x) = g^{A^\eta}(x) + g^{B^\eta}(x)$, $x \in X$, но $g^{(A \cap B)^\eta}(x) = g^{A^\eta \cap B^\eta}(x) = P^\eta(\eta \in A_x \cap B_x) \leq P^\eta(\eta \in A_x) \times P^\eta(\eta \in B_x) = g^{A^\eta}(x) \times g^{B^\eta}(x)$, $x \in X$, в то время как в [2] в этом случае постулируется равенство. Если $A \subset B$, то, как нетрудно убедиться, $g^{A^\eta}(x) \leq g^{B^\eta}(x)$, $x \in X$, но из этих неравенств не следует, что $A \subset B$, как это постулируется в [2, 12]. Наконец, и.ф.о.п. $g^{X \setminus A^\eta}(\cdot)$ не определяется и.ф.о.п. $g^{A^\eta}(\cdot)$, как это постулируется для функций принадлежности нч.м. $X \setminus A^\eta$ и A^η в [2, 12], где следствием этого являются, вообще говоря, неравенства $(X \setminus A^\eta) \cup A^\eta \neq X$, $(X \setminus A^\eta) \cap A^\eta \neq \emptyset$. В данном случае, разумеется, $g^{X \setminus A^\eta}(x) + g^{A^\eta}(x) = 1$, $x \in X$.

4.2.1. Независимость нечетких множеств и нечетких элементов

Пусть $A_i: Y \rightarrow \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, — многозначные отображения, $q_j(\cdot): Y \rightarrow X'_j$, $j = 1, \dots, m$, — функции и для простоты $P^\eta(\cdot)$ и $N^\eta(\cdot)$ дуально согласованы; случай произвольных $P^\eta(\cdot)$ и $N^\eta(\cdot)$ см. в [51].

Определение 4.2. Нч.м. A_i^η , $i = 1, \dots, n$, и нч.э. $\xi_j = q_j(\eta)$, $j = 1, \dots, m$, назовем

- взаимно независимыми, если $\forall A_i \in \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, и $A'_j \in \mathcal{P}(X'_j)$, $j = 1, \dots, m$, $P^\eta(A_1^\eta \cap A_1 = \emptyset, A_1^\eta \neq \emptyset \ \& \ A_2^\eta \cap A_2 \neq \emptyset \ \& \dots \ \& \ A_n^\eta \cap A_n = \emptyset, A_n^\eta \neq \emptyset \ \& \ \xi_1 \in A'_1 \ \& \dots \ \& \ \xi_m \in A'_m) = \min\{P^\eta(A_1^\eta \cap A_1 = \emptyset, A_1^\eta \neq \emptyset), P^\eta(A_2^\eta \cap A_2 \neq \emptyset), \dots, P^\eta(A_n^\eta \cap A_n = \emptyset, A_n^\eta \neq \emptyset), P^\eta(\xi_1 \in A'_1), \dots, P^\eta(\xi_m \in A'_m)\}$ при любых (непротиворечивых) комбинациях « $= \emptyset$ », « $\neq \emptyset$ »;
- взаимно независимыми в смысле одноточечного покрытия, если $\forall x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $x'_j \in X'_j$, $j = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} P^\eta(x_1 \in A_1^\eta \ \& \ x_2 \notin A_2^\eta \ \& \dots \ \& \ x_n \in A_n^\eta \ \& \ \xi_1 = \\ &= x'_1 \ \& \dots \ \& \ \xi_m = x'_m) = \\ &= \min\{g^{A_1^\eta}(x_1), g^{X_2 \setminus A_2^\eta}(x_2), \dots, g^{A_n^\eta}(x_n), \\ & \quad g^{\xi_1}(x'_1), \dots, g^{\xi_m}(x'_m)\}, \end{aligned} \quad (21)$$

или, что в силу дуальной согласованности P и N эквивалентно (21), $N^\eta(x_1 \notin A_1^\eta \vee x_2 \in A_2^\eta \vee \dots \vee x_n \notin A_n^\eta \vee \xi_1 \neq x'_1 \vee \dots \vee \xi_m \neq x'_m) = \max\{\widehat{g}^{X_1 \setminus A_1^\eta}(x_1), \widehat{g}^{A_2^\eta}(x_2), \dots, \widehat{g}^{X_n \setminus A_n^\eta}(x_n), \widehat{g}^{\xi_1}(x'_1), \dots, \widehat{g}^{\xi_m}(x'_m)\}$, где $\widehat{g}^{A_i^\eta}(x_i) = N^\eta(x_i \in A_i^\eta)$, $\widehat{g}^{\xi_j}(x'_j) = N^\eta(\xi_j \neq x'_j)$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, $x'_j \in X'_j$, $j = 1, \dots, m$, для любых комбинаций « $\in$ » и « $\notin$ ». Взаимно независимые нч.м. и нч.э. взаимно независимы и в смысле одноточечного покрытия.

Если в (21) только нч.э., то (21) определит взаимную независимость нч.э.

Если $z_i(\cdot): X_i \rightarrow Z_i$, $i = 1, \dots, n$, — произвольные функции и нч.э. ξ_i , $i = 1, \dots, n$, взаимно независимы, то, как нетрудно проверить, взаимно независимы и нч.э. $\zeta_i = z_i(\xi_i)$, $i = 1, \dots, n$, и $\forall z_i \in Z_i$, $i = 1, \dots, n$, $g^{\zeta_1, \dots, \zeta_n}(z_1, \dots, z_n) = \sup\left\{\min_{1 \leq j \leq n} g^{\xi_j}(x_j) \mid x_i \in X_i, z_i(x_i) = z_i, i = 1, \dots, n\right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \sup\{g^{\xi_i}(x_i) \mid x_i \in X_i, z_i(x_i) = z_i\} = \min_{1 \leq i \leq n} g^{\zeta_i}(z_i)$, где $g^{\zeta_i}(z_i) = \sup\{g^{\xi_i}(x_i) \mid x_i \in X_i, z_i(x_i) = z_i\}$, $z_i \in Z_i$, $i = 1, \dots, n$.

Если нч.э. $\eta_1, \dots, \eta_n$ взаимно независимы, то нч.м. $A_1^{\eta_1}, \dots, A_n^{\eta_n}$ взаимно независимы при любых отображениях $A_i: Y_i \rightarrow \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, и для любой функции $q(\cdot): Y_i \rightarrow X_i$ и любого отображения $A: Y_j \rightarrow \mathcal{P}(X_j)$ нч.э. $\xi = q(\eta_i)$ и нч.м. A^{η_i} , $i \neq j$, независимы.

В случае произвольных P^ξ и N^ξ , если $g^\xi(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L}$, $\widehat{g}^\xi(\cdot): X \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ суть распределения возможностей и необходимостей значений ξ , $A: Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$, нч.м. A^η и нч.э. ξ независимы в смысле одноточечного покрытия, то возможность и необходимость покрытия нч.э. ξ нч.м. A^η

$$\begin{aligned} P^\xi(\xi \in A^\eta) &= p_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot)) = \bigoplus_{x \in X} (g^\xi(x) \times g^{A^\eta}(x)), \\ N^\xi(\xi \in A^\eta) &= n_{\widehat{g}^\xi}(\widehat{g}^{A^\eta}(\cdot)) = \bigoplus_{x \in X} (\widehat{g}^\xi(x) \times \widehat{g}^{A^\eta}(x)). \end{aligned} \quad (22)$$

4.2.2. Условные и переходные возможность и необходимость

Определение 4.3. Вариантом условного (со значениями в шкале $\mathcal{L}$) распределения возможностей равенств $\xi_1 = x_1$, $x_1 \in X_1$, при условии $\xi_2 = x_2$, назовем любое решение $g^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2)$ уравнения

$$\min\{g^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2), g^{\xi_2}(x_2)\} = g^{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2), \quad x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2, \quad (23)$$

где

$$g^{\xi_2}(x_2) = \sup\{g^{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1\}, \quad x_2 \in X_2. \quad (24)$$

Вариантом условного (со значениями в шкале $\widehat{\mathcal{L}}$) распределения необходимостей неравенств $\xi_1 \neq x_1$, $x_1 \in X_1$, при условии¹ $\xi_2 = x_2$, назовем любое решение $\widehat{g}^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2)$ уравнения

$$\widehat{g}^{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \max\{\widehat{g}^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2), \widehat{g}^{\xi_2}(x_2)\}, \quad x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2, \quad (25)$$

где $\widehat{g}^{\xi_2}(x_2) = \inf\{\widehat{g}^{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1\}$, $x_2 \in X_2$.

Поскольку в (23), (24) $g^{\xi_2}(x_2) \geq g^{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, уравнение (23) разрешимо относительно $g^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2)$. Любой вариант условного, при условии $\xi_2 = x_2$, распределения возможностей

¹ Неравенство $(\xi_1, \xi_2) \neq (x_1, x_2)$, необходимость которого слева в (25), верно, когда либо $\xi_1 \neq x_1$, если $\xi_2 = x_2$, либо $\xi_2 \neq x_2$.

значений ξ_1 можно определить равенством

$$g^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2) = \begin{cases} g^{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2), \\ \text{если } g^{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) < g^{\xi_2}(x_2), \\ f(g^{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)), \\ \text{если } g^{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = g^{\xi_2}(x_2), \end{cases} \quad (26)$$

$$x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2,$$

где $f(\cdot): \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ — произвольная функция такая, что $f(a) \geq a$, $a \in [0, 1]$.

Заметим, однако, что при некоторых $x_2 \in X_2$ среди вариантов (26) условного распределения $g^{\xi_1|\xi_2}(\cdot|x_2)$ может и не быть распределения условной возможности, определенной как решение $P^{\xi_1|\xi_2}(\xi_1 = x_1|\xi_2 = x_2)$ уравнения $P^{\xi_1,\xi_2}(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = \min\{P^{\xi_1|\xi_2}(\xi_1 = x_1|\xi_2 = x_2), P^{\xi_2}(\xi_2 = x_2)\}$, в котором $P^{\xi_2}(\xi_2 = x_2) = \sup_{x_1 \in X_1} P^{\xi_1,\xi_2}(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2)$.

Действительно, если в (24) при некотором $\bar{x}_2 \in X_2$ точная верхняя грань не достигается, то $g^{\xi_1,\xi_2}(x_1, \bar{x}_2) < g^{\xi_2}(\bar{x}_2)$, $x_1 \in X_1$, и, следовательно, в (23) (см. (26))

$$\min\{g^{\xi_1|\xi_2}(x_1|\bar{x}_2), g^{\xi_2}(\bar{x}_2)\} = g^{\xi_1|\xi_2}(x_1|\bar{x}_2) = g^{\xi_1,\xi_2}(x_1, \bar{x}_2). \quad (27)$$

Если при этом $g^{\xi_2}(\bar{x}_2) < 1$, то, согласно (24), (27), $\sup_{x_1 \in X_1} g^{\xi_1|\xi_2}(x_1|\bar{x}_2) = g^{\xi_2}(\bar{x}_2) < 1$, т.е. $g^{\xi_1|\xi_2}(\cdot|\bar{x}_2): X_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ не есть распределение условной возможности значений нч.э. ξ_1 .

Подобное замечание касается и условного распределения необходимостей в (25). Эта проблема не возникает, если решение (26) рассматривать в субъективной шкале значений возможности, определенной м.-и., в которой событие $\xi_2 = x_2$ достоверно [77].

Эти замечания, а также тот факт, что для определения условных распределений необходимо знать совместные распределения, объясняют, почему естественнее использовать переходные возможности, необходимость и их распределения.

Определение 4.4. Переходной возможностью (необходимостью) для $(X, \mathcal{P}(X))$ и $(D, \mathcal{P}(D))$ называется любое отображение $P(\cdot|\cdot): \mathcal{P}(D) \times X \rightarrow \mathcal{L}$ ($N(\cdot|\cdot): \mathcal{P}(D) \times X \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$) такое, что при каждом $x \in X$ $P(\cdot|x): \mathcal{P}(D) \rightarrow \mathcal{L}$ ($N(\cdot|x): \mathcal{P}(D) \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$) есть возможность (необходимость) на $(D, \mathcal{P}(D))$ [51, 2007 г.].

Лемма 4.1. Пусть $P_X(\cdot): \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{L}$ ($N_X(\cdot): \mathcal{P}(X) \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$) — возможность (необходимость) на $(X, \mathcal{P}(X))$, $g^\xi(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L}$ ($\hat{g}^\xi(\cdot): X \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$) — ее распределение и $\pi^{\delta|\xi}(\cdot|x): D \rightarrow \mathcal{L}$ ($\hat{\pi}^{\delta|\xi}(\cdot|x): D \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$) — распределение переходной возможности $P(\cdot|x): \mathcal{P}(D) \rightarrow \mathcal{L}$ (переходной необходимости $N(\cdot|x): \mathcal{P}(D) \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$), $x \in X$. Тогда $g^{\xi,\delta}(x, d) = \min\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), g^\xi(x)\}$ ($\hat{g}^{\xi,\delta}(x, d) = \max\{\hat{\pi}^{\delta|\xi}(d|x), \hat{g}^\xi(x)\}$), $x \in X$, $d \in D$, — распределение возможности $P(\cdot): \mathcal{P}(X \times D) \rightarrow$

$\rightarrow \mathcal{L}$, $P(C) = \sup_{(x,d) \in C} g^{\xi,\delta}(x, d)$ (необходимости $N(\cdot): \mathcal{P}(X \times D) \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$, $N(C) = \inf_{(x,d) \in (X \times D) \setminus C} \hat{g}^{\xi,\delta}(x, d)$), $C \in \mathcal{P}(X \times D)$.

Замечание 4.3. Первые публикации по п. 4 — [24, 69]. Нч.э. вводится так же, как, например, в [16]. Автору неизвестны публикации, в которых нч.м. определяется [28] как многозначное отображение, и публикации, в которых рассматриваются связи между р-, п-интегралами и математическим ожиданием.

Заключение

В статье показаны принципиальные трудности, свойственные как интерпретации событийно-частотных наблюдений за эволюционирующим стохастическим объектом (Э.СТ.О.), так и эмпирическому восстановлению его вероятностной модели. В качестве альтернативной модели вероятностной случайности, ориентированной на их преодоление, предложена возможность как мера относительной предопределенности результатов событийно-частотных наблюдений за Э.СТ.О.

Рассмотрены свойства возможности, позволившие интерпретировать событийно-частотные наблюдения за Э.СТ.О. и эмпирически восстанавливать нечеткую модель класса Э.СТ.О., нечетко эквивалентные вероятностные модели которых не могут быть восстановлены эмпирически, решать задачи, типичные для приложений теории вероятностей, моделировать как вероятностную, так и невероятностную случайности, свойственные реальным физическим, техническим, социальным системам и т.п.

В отличие от вероятностной модели $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$ Э.СТ.О., произвольно эволюционирующей в пределах класса нечетко эквивалентных моделей, его единственная с точностью до эквивалентности нечеткая модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P, N)$ позволяет решать все задачи для любого Э.СТ.О., вероятностная модель которого эволюционирует в пределах класса нечетко эквивалентных, которые вероятностными методами можно решить для неэволюционирующего СТ.О.

Методы решения прикладных задач, рассмотренные в статье «Математическое моделирование феноменов случайности и нечеткости в научных исследованиях. 2. Приложения», основаны на представленной в данной статье теории мер возможности P , необходимости N и р-, п-интегралов и их связей с вероятностью Pr и с математическим ожиданием соответственно.

Автор выражает благодарность Ю. М. Нагорному и Д. А. Балакину за обсуждение и за помощь при подготовке электронного варианта статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 08-07-00133а, 11-07-00722, 14-07-00441).

Список литературы

1. Choquet G. // Ann. Inst. Fourier. 1953/1954. **5**. P. 131.
2. Zadeh L. A. // Information and Control. 1965. **8**. P. 235.
3. Dempster A. P. // Ann. Math. Statist. 1967. **38**. P. 325.
4. Dempster A. P. // J. Roy Statist. Soc. 1968. **B30**. P. 205.
5. Savage L. J. The Foundations of Statistics, Dover. N. Y., 1972.
6. Sugeno M. The Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications: Ph.D. Thesis. Tokyo Institute of Technology. Tokyo, 1974.
7. Shafer G. A mathematical theory of evidence. Princeton; N. J.: Princeton University Press, 1976.
8. Zadeh L. A. // Fuzzy Sets and Systems. 1978. № 1. P. 3.
9. Орловский С. А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
10. Fuzzy Sets and Possibility Theory. Recent Developments / Ed. by P. P. Yager. N. Y., Oxford, Toronto: Pergamon Press, 1982.
11. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, 1986.
12. Dubois D., Prade H. Theorie des Possibilites. Paris; Milano; Barcelona; Mexico: Masson, 1988. (Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.)
13. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 1994. **4**, N 2. P. 177.
14. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 1995. **5**, N 1. P. 13.
15. de Cooman G., Kerre E. E. // Fuzzy Sets and Systems. 1996. **77**, N 2. P. 207.
16. de Cooman G. // Int. J. of General Systems. 1997. **25**. P. 291.
17. de Cooman G. // Int. J. of General Systems. 1997. **25**. P. 325.
18. de Cooman G. // Int. J. of General Systems. 1997. **25**. P. 353.
19. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 1997. **7**, N 3. P. 338.
20. Dubois D., Prade H. Possibility theory: qualitative and quantitative aspects / Quantified Representation of Uncertainty and Imprecision / Ed. by D. M. Gabbay, P. Smets. Kluwer Academic Publishers, 1998. V. 1 of Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems. P. 169.
21. Wolkenhauer O. Possibility Theory with Applications to Data Analysis. Research Studies Press, 1998.
22. Кнедзи А., Дзюндзо В., Сокукэ И. и др. Прикладные нечеткие системы / Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. М.: Мир, 1993.
23. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 1998. **8**, N 1. P. 1.
24. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 1999. **9**, N 3. P. 416.
25. Dubois D., Nguyen H. T., Prade H. Possibility Theory, Probability and Fuzzy Sets: Misunderstandings, Bridges and Gaps / Fundamental of Fuzzy Sets / Ed. by D. Dubois, H. Prade. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000. P. 343.
26. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2000. **10**, N 1. P. 43.
27. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2000. **10**, N 4. P. 447.
28. Пытьев Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
29. Dubois D., Prade H., Sandri S. On Possibility/Probability Transformation // Proceedings of Fourth IFSA Conference. — Kluwer Academic Publ., 1993. P. 103.
30. D'yakonova I. V., Matveeva T. V., Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. **11**, N 4. 2001. P. 711.
31. Пытьев Ю. П. // Интеллектуальные системы. 2001. **6**, № 1–4. С. 25.
32. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. **12**, N 2. P. 107.
33. Pyt'ev Yu. P., Zhuchko O. V. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. **12**, N 2. P. 116.
34. Matveeva T. V., Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. **12**, N 3. P. 316.
35. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. **12**, N 4. P. 376.
36. Пытьев Ю. П., Мазаева И. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. № 5. С. 20.
37. Pyt'ev Yu. P., Zhivotnikov G. S. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2004. **14**, N 1. P. 60.
38. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2004. **14**, N 4. P. 529.
39. Пытьев Ю. П. // Интеллектуальные системы. 2004. **8**, вып. 1–4. С. 147.
40. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2004. **14**, N 4. P. 541.
41. Pyt'ev Yu. P. // Pattern Recognition and Image Analysis. 2006. **16**, N 3. P. 1.
42. Dubois D. // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. **51**. P. 47.
43. De Campos G., Huete J. F. // Int. J. Gen. Syst. 2001. **30**, N 3. P. 309.
44. Masson M., Denoeux T. // Fuzzy Sets and Systems. 2006. **157**. P. 319.
45. Пытьев Ю. П. // Интеллектуальные системы. 2007. **11**, № 1–4. С. 277.
46. Dubois D., Prade H. Formal representations of uncertainty // Decision-Making Process / Ed. by D. Bouysou, D. Dubois, M. Piriot, H. Prade. L.: Wiley-ISTE, 2009.
47. Папилин С. С., Пытьев Ю. П. // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 12. С. 144.
48. Papilin S. S., Pyt'ev Yu. P. // Mathematical Models and Computer Simulation. 2011. **3**, issue 4. P. 528.
49. Yager R. R. // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2012. February. **20**, N 1. P. 46.
50. Yager R. R. // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2012. June. **20**, N 3. P. 526.
51. Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. М.: Физматлит, 2007; 2-е изд., перераб. и доп., 2016.
52. Пытьев Ю. П. // Математическое моделирование. 2013. **25**, № 4. С. 102.
53. Pyt'ev Yu. // Mathematical Modeling and Computer Simulations. 2013. **5**, N 6. P. 538.
54. Кашияв П. Л., Рао А. Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М.: Наука, 1983.
55. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Физматлит, 1985.
56. Пытьев Ю. П. // Автоматика и телемеханика. 2010. № 3. С. 131.

57. George J.K. Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory. Hoboken, N.J.: John Wiley, 2006.
58. Hoeffding W. // J. Amer. Statist. Assoc. 1963. **58**, N 301. P. 213.
59. Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М.: Наука, 2002. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Физматлит, 2011.
60. Хьюбер Дж.П. Робастность в статистике. 1984. М.: Мир.
61. Орлов А.И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2004.
62. Новые направления в обработке данных. studopedia.ru
63. Пытьев Ю.П. // Матем. сб. 1983. **118** (160), № 1 (5). С. 19.
64. Демьянов В.Ф., Малозёмов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
65. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3. (Pyt'ev Yu.P. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1997. **52**, N 3. P. 1.)
66. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 4. С. 3.
67. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 6. С. 3.
68. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 1. С. 3. (Pyt'ev Yu.P. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1998. N 1. P. 1.)
69. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 2. С. 3. (Pyt'ev Yu.P. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1998. N 2. P. 1.)
70. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 5. С. 3. (Pyt'ev Yu.P. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1999. **54**, N 5. P. 1.)
71. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 6. С. 3. (Pyt'ev Yu.P. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1999. **54**, N 6. P. 1.)
72. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 6. С. 3. (Pyt'ev Yu.P. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1998. N 6. P. 1.)
73. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 1. С. 3. (Pyt'ev Yu.P. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1999. **54**, N 1. P. 1.)
74. De Cooman G., Aeyels D. // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 2000. **30**. P. 124.
75. Nguyen H.T., Bouchon-Meunier B. // Soft Computing. 2003. **8**. P. 61.
76. Pyt'ev Yu.P., Mazaeva I.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2002. **57**, N. 5. P. 27.
77. Пытьев Ю.П. Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях. 1. Математические и эмпирические основы // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. (подготовлена к публикации).
78. Pyt'ev Yu.P. // Automation and Remote Control. **71**, N 3. P. 486.

Mathematical modeling of randomness and fuzziness phenomena in scientific studies.

I. Mathematical and empirical foundations

Yu. P. Pyt'ev

Department of Mathematical Modelling and Informatics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru, yuri.pytyev@gmail.com.

The possibility theory as a mathematical model of randomness and fuzziness phenomena is considered in a variant that enables the modeling of both probabilistic randomness, including that inherent in unpredictably evolving stochastic objects whose probabilistic models cannot be empirically reconstructed and nonprobabilistic randomness (fuzziness) inherent in real physical, technical, and economical objects, human-machine and expert systems, etc. Some principal distinctions between the considered variant and the known possibility theory variants, in particular, in mathematical formalism and its relationship with probability theory, substantive interpretation, and applications exemplified by solving the problems of identification and estimation optimization, empirical reconstruction of a fuzzy model for a studied object, measurement data analysis and interpretation, etc. (in the paper "Mathematical Modeling of Randomness and Fuzziness Phenomena in Scientific Studies. II. Applications") are shown.

Keywords: probability, randomness, possibility, necessity, fuzziness.

PACS: 07.05.Kf.

Received 22 June 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **71**, No. 1. Pp. 1–15.

Сведения об авторе

Пытьев Юрий Петрович — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой;
тел.: (495) 939-13-32, e-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru, yuri.pytyev@gmail.com.