С Т А Т Ь И

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Численное решение задачи о межслойном переходе как задачи волноводной дифракции

А. Л. Делицын

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: delitsyn@mail.ru

Статья поступила 30.05.2016, подписана в печать 13.07.2016.

Применение сеточных методов к решению задачи о межслойном переходе приводит к необходимости ограничения области и постановки фиктивных граничных условий. В настоящей работе применятся введение фиктивного коаксиала для сведения исходной задачи к задаче волноводной дифракции. Рассмотрены результаты тестирования разработанной конечно-элементной программы, показывающие высокую точность применяемого метода. Исследованная зависимость решения от положения фиктивной границы показывает быструю сходимость метода.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, многослойные системы, метод смешанных конечных элементов, емкость.

УДК: 517.95. PACS: 41.20.Jb.

Введение

Задача о межслойном переходе, например, в печатных платах, может рассматриваться в двух вариантах. Первый — это случай бесконечных пластин. В этом случае, возможно, по крайней мере для осесимметричной задачи, сведение исходной задачи в бесконечной области к задаче в конечной области с нелокальными краевыми условиями — парциальными условиями излучения [1–3]. Это позволяет рассматривать внутреннюю краевую задачу и применять сеточные методы к ее решению. Второй вариант задачи связан с прохождением проводной волны через межслойный переход, представляющий собой набор пластин конечного радиуса (рис. 1). Подобная задача рассматривается в неограниченном пространстве, что представляет основную сложность при применении сеточных методов к ее решению. Применение метода связанных интегральных уравнений вызывает ряд трудностей, связанных как со структурой системы интегральных уравнений при учете питающего систему провода, так и при рассмотрении интегральных уравнений для случая пластин малой толщины. В настоящей работе для исследования подобной задачи применяется подход, основанный на введении фиктивной волноводной внешней стенки, в результате чего задача о межслойном переходе сводится к задаче дифракции в коаксиальном волноводе. Для решения задачи дифракции применяется метод смешанных конечных элементов [4]. Различные схемы сеточных методов для подобных задач рассматривались, например, в работах [5–12]. При отодвигании внешней стенки в бесконечность решение задачи дифракции в коаксиальном волноводе

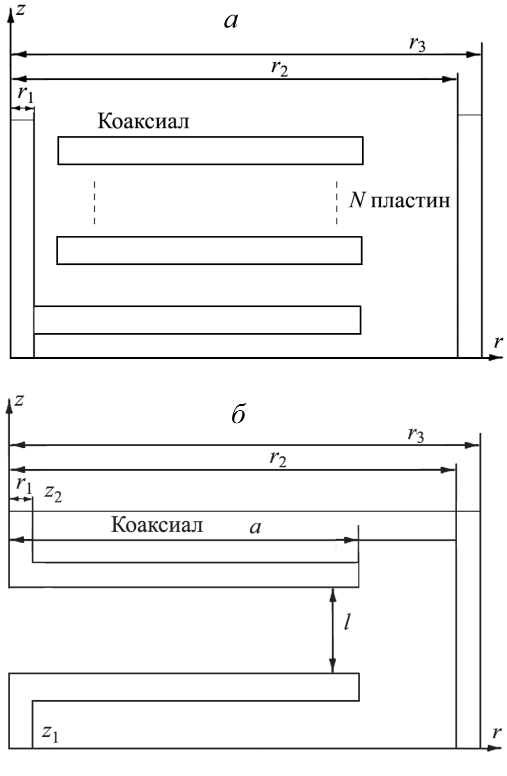

Рис. 1. Принципиальная схема межслойного перехода (*а*) и параметры конденсатора, помещенного в коаксиал (*б*)

переходит в решение исходной «открытой» задачи. Основным вопросом является возможность применения подобного метода на практике, связанного с исследованием вопроса о скорости сходимости численных решений в зависимости от расстояния до фиктивной стенки. Результаты вычислений показывают, что в диапазоне частот 1–100 МГц даже при не очень большом отнесении стенки от системы пластин результаты вычислений стабилизируются. Для тестирования разработанной программы рассмотрена задача дифракции на паре пластин, образующих конденсатор. При расстоянии от оси центрального провода до внешней стенки, равном удвоенному радиусу пластин, наблюдается хорошее совпадение результатов конечно-элементных вычислений с обобщенной формулой Кирхгофа [13] для емкости конденсатора.

1. Постановка задачи и метод ее решения

В качестве сеточного метода, применяемого для решения задачи, будем использовать метод смешанных конечных элементов. Приведем кратко основные моменты постановки задачи и применения этого метода. Рассматриваемая задача обладает осевой симметрией. Заменяем в дальнейшем производные по координате ϕ цилиндрической системы координат нулем [14].

Для решения задачи дифракции в волноводе используем систему уравнений Максвелла, разрешенную относительно электрического поля $\mathbf{E}=\{E_r,E_z\}$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}-k^2\varepsilon\mathbf{E}=0 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\partial Q}=0 \tag{2}$$

и условиями сопряжения

$$[\mathbf{E}\times\mathbf{n}]_S=0, \tag{3}$$

$$[\operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{n}]_S=0 \tag{4}$$

на поверхностях S раздела металл–воздух. Под Q понимаем цилиндр, ограниченный внешним радиусом коаксиала, ∂Q — боковая поверхность цилиндра.

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon=1+i\frac{4\pi}{kc}\sigma=$ $=1+i\frac{2\sigma}{f}$, где σ — проводимость, f — частота, является кусочно-постоянной функцией, описывающей в том числе металл при комплексных значениях.

Отметим, что для электрического поля рассматривается система двух уравнений, координата E_ϕ полагается равной нулю:

$$-\frac{\partial^2E_r}{\partial z^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial r\partial z}-k^2\varepsilon E_r=0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial E_z}{\partial r}-k^2\varepsilon E_z=0. \tag{6}$$

В силу того что при $r\to0$ величина $rH_\phi\to0$, используем для вектора $\mathbf{E}$ краевое условие

$$\lim_{r\to0}r\left(\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)=0. \tag{7}$$

Одним из основных вопросов, возникающих при применении метода конечных элементов, является постановка условий излучения. Будем использовать парциальные условия излучения–возбуждения при $z=z_2$, учитывающие только одну отраженную основную моду $\mathbf{E}_0=\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_r$. Считаем, что возбуждение системы происходит основной модой указанного вида, падающей, например, из ∞:

$$[\operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{n}]_{z=z_2}=T_1\mathbf{E}+2ik\boldsymbol{E_0}, \tag{8}$$

где

$$T_1E=ik\int_{r_1}^{r_2}r\mathbf{E}\mathbf{E}_0^*\,dr\,\mathbf{E}_0,$$

и аналогично при $z=z_1$

$$[\operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{n}]_{z=z_1}=T_2\mathbf{E}, \tag{9}$$

где

$$T_2E=-ik\int_{r_1}^{r_2}r\mathbf{E}\boldsymbol{E_0^*}dr\boldsymbol{E_0},$$

Будем искать слабые решения задачи (1)–(4), (7)–(9) из уравнения

$$\int_\Omega\left(\operatorname{rot}\mathbf{E}\operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{E}}-k^2\varepsilon\mathbf{E}\widetilde{\boldsymbol{E}}\right)r\,dr\,dz-\sum_{i=1}^{2}\int_{r_1}^{r_2}T_i\mathbf{E}\widetilde{\mathbf{E}}\,dr=$$
$$=2ik\int_{r_1}^{r_2}\mathbf{E}\mathbf{E}_0dr, \tag{10}$$

которому должен удовлетворять вектор $\mathbf{E}\in H_0(\operatorname{rot})$, т. е. $\mathbf{E}\in L_2(\Omega)$, $\operatorname{rot}\mathbf{E}\in L_2(\Omega)$, $\mathbf{E}\times n|_{\partial\Omega}=0$ для любого $\widetilde{\mathbf{E}}\in H_0(\operatorname{rot})$.

Для магнитного поля H_ϕ справедливо уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rH_\phi=-ik\varepsilon(r,z)E_z \tag{11}$$

и краевое условие

$$H_\phi(0,z)=0,$$

позволяющие определить его непосредственным интегрированием поля E_z:

$$H_\phi=-\frac{ik}{r}\int_0^r r\varepsilon(r,z)E_z\,dr.$$

Приближенное решение задачи (7) будем искать в виде

$$E_r=\sum_{ij}E_{r\,ij}N_i(z)p_{j,j+1}(r),$$

$$E_z=\sum_{ij}E_{z\,ij}N_i(r)p_{j,j+1}(z),$$

где

$$N_i(z)=\begin{cases}\dfrac{z-z_{i-1}}{z_i-z_{i-1}}, & z_{i-1}\leqslant z\leqslant z_i,\\ \dfrac{z_{i+1}-z}{z_{i+1}-z_i}, & z_i\leqslant z\leqslant z_{i+1},\\ 0, & z\notin[z_{i-1},z_{i+1}],\end{cases}$$

$$p_{j,j+1}(r)=\begin{cases}1, & r_j\leqslant r\leqslant r_{j+1},\\ 0, & r\notin[r_j,r_{j+1}],\end{cases}$$

r_i, $i=1,\ldots,N_r$, по оси r и z_j, $j=1,\ldots,N_z$, по оси z.

Определив электромагнитные поля, вычислим матрицу импедансов системы, представляющую основной интерес с прикладной точки зрения.

2. Сравнение результатов вычислений методом конечных элементов с результатами, получаемыми по уточненной формуле Кирхгофа

В качестве теста рассмотрен конденсатор с параметрами (рис. 2) $a = 1.25$ мм — радиус пластин, $l = 0.1$ мм — расстояние между пластинами. Радиус возбуждающего цилиндра $r_1 = 0.125$ мм. Радиусы внешнего цилиндра приведены в п. 1–3 ниже.

В качестве значения емкости, с которым производится сравнение, рассматривается

$$C = \varepsilon_0 a\left(\pi a/l + \ln(16\pi a/l) - 1 + 1/(4/\pi)l/a(\ln l/2a)^2\right).$$

Приведем методику тестирования конечно-элементной программы. Для вычисления матрицы импедансов из результатов решения задачи дифракции рассматриваем возбуждение системы волной, падающей из $-\infty$ и ∞.

При возбуждении из $-\infty$ (снизу) коаксиальной волной вида

$$E_r = e^{ikz}\frac{1}{r}, \quad H_\phi = e^{ikz}\frac{1}{r}$$

фазовая скорость волны $e^{ikz-i\omega t}$ направлена в положительном направлении оси z. При $z = z_1$ и $z = z_2$ вычисляются значения напряжния

$$V_{11} = \int\limits_{r_1}^{r_2} E_r(r, z_1)\,dr, \quad V_{21} = \int\limits_{r_1}^{r_2} E_r(r, z_2)\,dr.$$

Под r_1 понимается радиус внутреннего цилиндра, под r_2 — радиус внешнего

Токи вычисляются по формулам

$$I_{11} = 2\pi\sigma\int\limits_0^{r_1} rE_z(r, z_1)\,dr, \quad I_{21} = -2\pi\sigma\int\limits_0^{r_1} rE_z(r, z_2)\,dr.$$

При возбуждении сверху коаксиальной волной вида

$$E_r = e^{-ikz}\frac{1}{r}, \quad H_\phi = -e^{-ikz}\frac{1}{r}$$

фазовая скорость волны $e^{ikz+i\omega t}$ направлена в отрицательном направлении оси z.

При $z = z_1$ и $z = z_2$ вычисляются напряжения

$$V_{12} = \int\limits_{r_1}^{r_2} E_r(r, z_1)\,dr, \quad V_{22} = \int\limits_{r_1}^{r_2} E_r(r, z_2)\,dr$$

и токи

$$I_{12} = 2\pi\sigma\int\limits_0^{r_1} rE_z(r, z_1)\,dr, \quad I_{22} = -2\pi\sigma\int\limits_0^{r_1} rE_z(r, z_2)\,dr.$$

Матрицы напряжний и токов равны

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица импедансов определяется из уравнения

$$V = ZI.$$

В задаче о конденсаторе, очевидно, $V_{11} = V_{22}$, $V_{21} = V_{12}$, $I_{11} = I_{22}$, $I_{21} = I_{12}$. Тогда

$$Z = \frac{1}{\det I}\begin{pmatrix} I_{11}V_{11} - I_{12}V_{12} & I_{11}V_{12} - I_{12}V_{11} \\ -I_{12}V_{11} + I_{11}V_{12} & -I_{12}V_{12} + I_{11}V_{11} \end{pmatrix}.$$

Для конденсатора

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = Z\begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix},$$

т. е.

$$V_1 = (Z_{11} - Z_{12})I, \quad V_2 = (Z_{21} - Z_{22})I.$$

Разность потенциалов

$$V_1 - V_2 = (Z_{11} + Z_{22} - (Z_{12} + Z_{21}))I = 2(Z_{11} - Z_{12})I.$$

Приведем результаты сравнения вычисленных значений

$$\frac{1}{\omega C} = 2(Z_{11} - Z_{12})$$

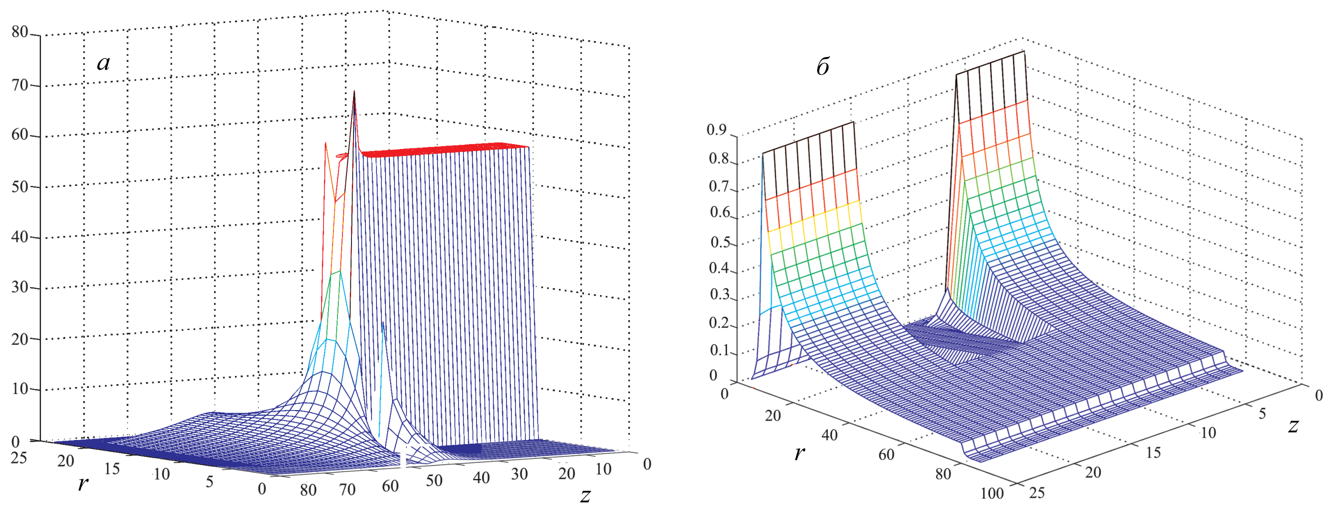

Рис. 2. H_ϕ-координата поля в конденсаторе (*а*) и E_z-координата поля в конденсаторе (*б*)

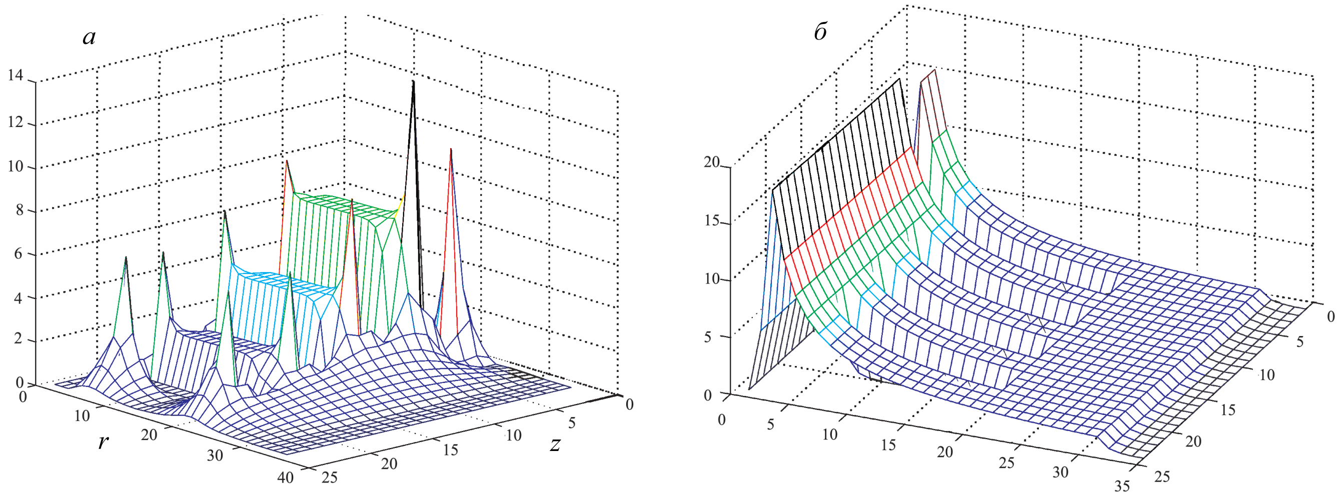

Рис. 3. E_z-координата поля в трехслойном переходе (*а*) и H_ϕ-координата поля в трехслойном переходе (*б*)

со значением емкости, определямым указанной формулой.

1. Расстояние до внешнего цилиндра 2 мм:

f, Гц	C, Ф, вычисленное	C, Ф, определяемое формулой
10^8	$4.851 \cdot 10^{-13}$	$4.956 \cdot 10^{-13}$
10^7	$4.851 \cdot 10^{-13}$	$4.956 \cdot 10^{-13}$
10^6	$4.851 \cdot 10^{-13}$	$4.956 \cdot 10^{-13}$

Увеличение проводимости, соответствующей меди, на 4 порядка не меняет $C = 4.85 \cdot 10^{-13}$ Ф.

2. Расстояние до внешнего цилиндра 2.7 мм:

f, Гц	C, Ф, вычисленное	C, Ф, определяемое формулой
10^8	$4.853 \cdot 10^{-13}$	$4.956 \cdot 10^{-13}$
10^7	$4.853 \cdot 10^{-13}$	$4.956 \cdot 10^{-13}$
10^6	$4.853 \cdot 10^{-13}$	$4.956 \cdot 10^{-13}$

3. Расстояние до внешнего цилиндра 3.2 мм:

f, Гц	C, Ф, вычисленное	C, Ф, определяемое формулой
10^8	$4.855 \cdot 10^{-13}$	$4.956 \cdot 10^{-13}$
10^7	$4.855 \cdot 10^{-13}$	$4.956 \cdot 10^{-13}$
10^6	$4.855 \cdot 10^{-13}$	$4.956 \cdot 10^{-13}$

В качестве графической иллюстрации, показывающей возможности конечно-элементной программы, приведем картины волновых полей для H_ϕ и E_z компонент поля (рис. 2).

В качестве примера приведем результаты расчетов E_z, H_ϕ компонент поля на слоистой системе из 4 пластин переменного радиуса (рис. 3). Приведем типовые значения параметров межслойного перехода. Радиус внутреннего цилиндра в коаксиале $r_2 = 0.125$ мм. Внутренний радиус внешнего цилиндра коаксиала $r_2 = 0.25$ мм. Внешний радиус коаксиала $r_3 = 0.375$ мм. Расстояние между пластинами $h = 0.2$ мм.

Заключение

Разработанная программа позволяет вычислять характеристики межслойных переходов с пластинами конечного радиуса. Результаты вычислений показывают быструю сходимость решения при увеличении радиуса внешего фиктивного цилиндра. Проведенное тестирование показывет высокую точность применяемого метода.

Список литературы

1. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высш. школа, 1991.
2. *Свешников А.Г.* // ДАН СССР. 1950. **3**. № 5. С. 517.
3. *Свешников А.Г., Могилевский И.Е.* Избранные математические задачи теории дифракции: М.: Физ. ф-т МГУ, 2012.
4. Handbook of Numerical Analysis. V. 2 / Ed. by P. G. Ciarlet, J. L. Lions. N.H.: Elsevier, 1991.
5. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. **14**. № 4. С. 947.
6. *Боголюбов А.Н., Буткарев И.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. № 4. С. 6. (*Bogolyubov A.N., Butkarev I.A.* // Moscow University Phys. Bull. 2003. **58**, N 4. P. 6.)
7. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Буткарев И.А.* // Радиотехника и электроника. 2006. **51**. № 8. С. 901.
8. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Красильникова А.В.* и др. // Зарубеж. радиоэлектроника. Успехи соврем. радиоэлектроники. 1998. № 5. С. 39.
9. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1974. **14**, № 4. С. 947.
10. *Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Могилевский И.Е.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. **52**, № 6. С. 1058.
11. *Ho T.Q., Beker B.* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1991. **39**, N 6. P. 1021.
12. *Ise K., Inoue K., Koshiba M.* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1990. **38**. № 9. P. 1032.
13. *Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергия, 1969.
14. *Рамо С., Уинери Дж.* Поля и волны в современной радиотехнике. М.: ОГИЗ, 1948.

A numerical solution of the layer-to-layer transition problem as a waveguide diffraction problem

A. L. Delitsyn

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow 119991, Russia.
E-mail: delitsyn@mail.ru.

Application of net-point methods to the solution of the layer-to-layer transition problem leads to the necessity to restrict the domain and formulate artificial boundary conditions. In the present work the introduction of an artificial coaxial for reducing the original problem to a waveguide diffraction problem is applied. The test results of the finite-element program that we developed, which demonstrate the high accuracy of the method, are considered. The investigated dependence of the solution on the artificial boundary location shows the rapid convergence of the method.

Keywords: Maxwell equations, multilayer systems, mixed finite element method, capacity.
PACS: 41.20.Jb.
Received 30 May 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **72**, No. 2. Pp. 163–167.

Сведения об авторе

Делицын Андрей Леонидович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939–39–37, e-mail: delitsyn@mail.ru.