

## Эмпирическое восстановление математических моделей измерительного и оптимального вычислительного преобразователей

Д. А. Балакин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,  
кафедра математического моделирования и информатики.  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.  
E-mail: balakin\_d\_a@physics.msu.ru

Статья поступила 05.07.2016, подписана в печать 08.08.2016.

Как следует из теории измерительно-вычислительных систем [1], для достижения максимальной точности интерпретации измерений требования к измерительному преобразователю (ИП), преобразующему внешнее воздействие в электрический сигнал, оказываются существенно разными в зависимости от того, как он будет функционировать: как таковой или в составе измерительно-вычислительного преобразователя (ИВП). В первом случае максимальную точность интерпретации должен обеспечивать ИП, и она ограничивается физическими законами. Во втором максимальную точность интерпретации должен обеспечивать ИВП, рассматриваемый как средство измерения того же или иного назначения, в частности свойственного измерениям на «идеальном» приборе.

Точность ИВП определяется как математическими свойствами модели ИП, так и «качеством» алгоритма преобразования выходного сигнала ИП к виду, определенному целью измерения, и реализуемого вычислительным преобразователем (ВП). Для каждой конкретной математической модели ИП этот алгоритм должен обеспечивать максимальное качество ИВП. Оптимальный в этом смысле ИП, обеспечивающий *предельно высокую точность* ИВП как *средства измерения*, зачастую отличается от оптимального по точности ИП как такового.

Однако, как правило, точная математическая модель ИП и, следовательно, оптимальный для нее алгоритм, реализуемый ВП, исследователю не известны, но он может выполнить на ИП серию тестовых измерений известных сигналов, моделирующих взаимодействие ИП с измеряемым объектом. Цель настоящей работы заключается в *синтезе с помощью тестовых измерений* как выходного сигнала ИП, математическая модель которого априори неизвестна, так и *оптимальной интерпретации* результата измерения, т. е. выходного сигнала ИВП.

*Ключевые слова:* редукция измерения, оптимальные решения, измерительно-вычислительные системы, тестовые измерения.

УДК: 519.25. PACS: 02.50.Le.

### Введение

Рассмотрим типичную схему измерений, в которой в результате взаимодействия измеряемого объекта, среды и измерительного преобразователя (ИП) на входе ИП формируется (измеряемый) сигнал  $f$ , принадлежащий конечномерному<sup>1</sup> евклидову пространству  $\mathcal{F}$ , несущий информацию об измеряемом объекте и среде [1]. ИП преобразует  $f$  в сигнал

$$\xi = Af + \nu, \quad (1)$$

где  $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$  — оператор, моделирующий физические процессы в ИП (и далее обозначающий моделируемый им ИП), взаимодействующим с измеряемым объектом и со средой, определяющие преобразование  $f$  в сигнал  $Af$ ,  $\mathcal{X}$  — конечномерное евклидово пространство значений сигнала  $\xi$ ,  $\nu$  — погрешность, шум измерения. Одним из следствий теории измерительно-вычислительных систем [1] является то, что для достижения максимальной точности интерпретации данных измерений требования к ИП оказы-

ваются существенно различными в зависимости от того, как используется его выходной сигнал — непосредственно интерпретируется исследователем или поступает на вход вычислительного преобразователя (ВП), обрабатывающего этот сигнал. Поэтому ИП рассматривается не сам по себе, а как компонента (вместе с ВП) измерительно-вычислительного преобразователя — универсального средства измерения.

Результат измерения зависит от параметров *измеряемого* объекта, взаимодействующего с ИП, значения которых могут быть существенно искажены этим взаимодействием, а исследователя, как правило, интересуют характеристики *исследуемого* объекта, не возмущенного измерением. Связь параметров измеряемого и исследуемого объектов моделируется идеальным ИП, заданным оператором  $U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$ . На вход идеального ИП поступает тот же сигнал, что и на вход реального ИП, но на его выходе сигнал  $Uf$  равен характеристике исследуемого, а не измеряемого объекта. Как правило, идеальный

<sup>1</sup> Предположение о конечномерности пространств  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{U}$  делается для упрощения изложения и не является принципиальным. О редукции в случае бесконечномерных  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{X}$  или  $\mathcal{U}$  (см., например, [1, гл. 10]).

ИП не может быть реализован «в железе» из-за физических ограничений. Далее ВП на основе  $\xi$  синтезирует наиболее точную оценку интересующей исследователя характеристики  $Uf$ . Определение способа синтеза является задачей редукции измерения. Задача редукции состоит в нахождении оператора редукции  $R(\cdot): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ , для которого  $R(\xi)$  — наиболее точная версия значения  $Uf$ .

Если в (1)  $f$  — априори произвольный вектор, принадлежащий  $\mathcal{F}$ ,  $\nu$  — случайный вектор, принимающий значения в  $\mathcal{X}$ , имеющий математическое ожидание  $\mathbb{E}\nu = 0$  и невырожденный ковариационный оператор  $\Sigma_\nu: \forall x \in \mathcal{X} \Sigma_\nu x = \mathbb{E}\nu(x, \nu)$ , то линейный оператор  $R_*: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  редукции определяется как минимизирующий максимальную по  $f$  среднеквадратичную (с.к.) погрешность интерпретации  $R\xi$  как результата  $Uf$  измерения на идеальном ИП:  $h(R, U) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E}\|R(\xi) - Uf\|^2 \sim \min_{R: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}}$ . Эта погрешность минимальна [1] при

$$R_* = U(\Sigma_\nu^{-1/2}A)^{-1}\Sigma_\nu^{-1/2} \quad (2)$$

и равна  $h(R_*, U) = \text{tr}(U(A^*\Sigma_\nu^{-1}A)^{-1}U^*)$ , где « $^{-1}$ » обозначает операцию псевдообращения, если

$$U(I - A^{-1}A) = 0, \quad (3)$$

и равна бесконечности, если это условие не выполнено.

Если же оператор  $\Sigma_\nu$  неизвестен, но известно ограничение на среднюю «энергию» шума  $\mathbb{E}\|\nu\|^2 = \text{tr}\Sigma_\nu \leq \delta^2$  (см. [1, § 1.7]), то наиболее точная версия значения  $Uf$  есть

$$UA^{-1}\xi, \quad (4)$$

и ее с.к. погрешность не превосходит  $\delta^2\|U(A^*A)^{-1}U^*\|$ . Условием конечности ее с.к. погрешности также является  $U(I - A^{-1}A) = 0$ .

Цель настоящей работы — исследование случая, когда  $A$  исследователю неизвестен, за исключением, быть может, априорной информации о матрице  $A$  (например, «матрица  $A$  — симметричная») или о симметрии  $A$  по отношению к определенным преобразованиям, но исследователю доступны данные тестовых измерений. При этом возникают различные задачи:

1) оценивание отклика  $Af$  ИП  $A$  на сигнал  $f$ , который не может быть подан на вход прибора по тем или иным причинам (например, когда прямой измерительный эксперимент, т.е. взаимодействие ИП с измеряемым объектом в состоянии, соответствующем интересующему исследователя состоянию исследуемого объекта, и регистрация результата измерения, слишком дорог или практически невыполним);

2) оценивание ИП  $A$ ;

3) оценивание интересующей исследователя характеристики  $Uf$  исследуемого объекта по результату измерения  $\xi$  (1);

4) оценивание реализуемого оптимальным ВП оператора  $R_*$  редукции.

Первые два типа задач рассматриваются в разд. 1, последние два — в разд. 2. При этом, поскольку в задачах 1 и 3 и 2 и 4 исследователем преследуются различные цели, то и решаются эти задачи отдельно. Заметим, что, как правило, используемый для интерпретации измерений ВП выбирается соответствующим оцененному по тестовым измерениям  $A$  [2], а не непосредственно по тестовым измерениям, в силу чего результат интерпретации, как правило, неоптимален.

**Пример.** Пусть интересующая исследователя (скалярная) величина  $f$  измеряется с неизвестным «коэффициентом усиления»  $a$  и со случайной погрешностью  $\nu$ , имеющей нормальное распределение  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , т.е. результат измерения  $\xi = af + \nu \sim \mathcal{N}(af, \sigma^2)$ . Если значение  $a$  известно, то эффективной оценкой  $f$  (в классе несмещенных оценок [3]) является  $\xi/a$ . Неизвестный коэффициент  $a$  оценивается по результатам тестовых измерений  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  одной и той же величины  $g$ , причем погрешности измерений  $\mu_1, \dots, \mu_s$  независимы в совокупности и имеют нормальное распределение  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . В этом случае  $\hat{a} = \sum_{i=1}^s \zeta_i/gs$  — эффективная оценка  $a$ , причем  $\hat{a} \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2/g^2s)$ , а  $\hat{a}f$  — эффективная оценка результата измерения. Но, поскольку  $\mathbb{E}\hat{a}^{-1}$  не существует, оценка  $\xi/\hat{a}$  может сколь угодно сильно отклоняться от  $f$ .

Задача 3 близка к решаемой различными вариантами метода слепой деконволюции [4–7]. В рассматриваемом методе требуется проведение отдельных тестовых измерений (т.е. измерений известного входного сигнала). С другой стороны, в отличие от метода слепой деконволюции, не требуется, чтобы оператор  $A$  был типа свертки, не налагаются априорные ограничения на вид  $A$ , при котором задача разрешима (но учет таких априорных ограничений в рассматриваемом методе возможен (см. замечание 4), не требуются априорные предположения об измеряемом сигнале и отсутствуют ограничения на погрешность измерения).

В [8–18] задача 3 рассматривается в похожей постановке (также требуется построить оптимальную оценку  $Uf$  по результату измерения  $\xi$  и результатам тестовых измерений), но при случайном, а не произвольном, как в настоящей работе, входном сигнале  $f$ . Кроме того, используемое в [15–18] условие инвариантности заменяется более общим (см. замечание 4). В [19–21] задача 3 также рассматривается в похожей постановке, но в случае, если  $f$  и  $\nu$  — реализации нечетких векторов, а под оптимальной оценкой понимается оценка максимальной возможности, т.е. значение интересующей исследователя характеристики  $Uf$ , возможность которого максимальна при наблюдаемых значениях  $\xi$  и  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ . В частности, в [19, 21] оценка получена при предположении, что нечеткие векторы шума  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{\dim \mathcal{X}})$ , входного сигнала  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{\dim \mathcal{F}})$ , шумов тестовых измере-

ний  $\mu_1 = (\mu_{11}, \dots, \mu_{1 \dim \mathcal{X}}), \dots, \mu_s = (\mu_{s1}, \dots, \mu_{s \dim \mathcal{X}})$  и нечеткой матрицы  $\Lambda$  оператора  $A$  независимы и имеют распределения возможностей

$$g^\nu(x_1, \dots, x_{\dim \mathcal{X}}) = g_0 \left( \min_{j=1, \dots, \dim \mathcal{X}} |x_j| / \sigma_j \right),$$

$$g^\varphi(f_1, \dots, f_{\dim \mathcal{F}}) = g_0 \left( \min_{i=1, \dots, \dim \mathcal{F}} |f_i - f_{0,i}| / \sigma_i^{(\varphi)} \right),$$

$$g^{\mu_1, \dots, \mu_s}(x_{11}, \dots, x_{1 \dim \mathcal{X}}, \dots, x_{s1}, \dots, x_{s \dim \mathcal{X}}) =$$

$$= g_0 \left( \min_{j=1, \dots, \dim \mathcal{X}; k=1, \dots, s} |x_{kj}| / \sigma_{kj} \right),$$

$$g^\Lambda(A_{11}, \dots, A_{nN}) =$$

$$= g_0 \left( \min_{i=1, \dots, \dim \mathcal{F}, j=1, \dots, \dim \mathcal{X}} |A_{ji} - A_{0,ji}| / \sigma_{ji}^{(\Lambda)} \right)$$

соответственно, где  $g_0(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  — строго монотонно убывающая произвольная функция,  $g_0(0) = 1$ , константы  $f_{0,i}$  и  $A_{0,ji}$ ,  $i = 1, \dots, \dim \mathcal{F}$ ,  $j = 1, \dots, \dim \mathcal{X}$ , определяют наиболее возможные значения вектора  $\varphi$  и матрицы  $\Lambda$ , а также получено условие, определяющее оценку максимальной возможности в общем случае. В [20, 21] предполагается, что нечеткие векторы шума, входного сигнала, шумов тестовых измерений  $\mu_1, \dots, \mu_s$  и нечеткой матрицы  $\Lambda$  оператора  $A$  независимы и имеют распределения возможностей  $g^\nu(x) = g_0(\|x\|^2)$ ,  $g^\varphi(f) \equiv 1$  (входной сигнал априори произволен),

$$g^{\mu_1, \dots, \mu_s}(\mu_1, \dots, \mu_s) = g_0 \left( \sum_{k=1}^s \|\mu_k\|^2 \right), \quad g^\Lambda(A) \equiv 1$$

( $A$  априори произволен). В [22] рассматривается задача минимизации погрешности синтеза прибора  $U$  [1, гл. 9], а не погрешности синтеза  $Uf$ , как в настоящей работе, а также не рассматривается учет априорной информации об ИП. Иными словами, в [22] определялся оператор  $R$ , не минимизирующий с.к. погрешность  $\mathbb{E}\|R\xi - Uf\|^2$ , а минимизирующий отклонение  $RA$  от  $U$  (в смысле нормы Гильберта–Шмидта) при ограничении на уровень шума  $\mathbb{E}\|R\nu\|^2$  на выходе синтезированного прибора.

### 1. Восстановление модели измерительного преобразователя и его отклика на измеряемый сигнал

Рассмотрим задачу восстановления модели линейного измерительного преобразователя [1, § 6.5.4], в которой описывающий его оператор  $A$  априори задан как элемент параметрического класса операторов в виде

$$A = \sum_{k=1}^K \alpha_k A_k, \quad (5)$$

где линейные операторы  $A_1, \dots, A_k$  известны, а вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T$  параметров — произвольный элемент  $\mathcal{R}^K$  — подлежит восстановлению. «Детальность» представления (5) может быть различной, начиная со случая «полностью уточняемого» опе-

ратора, когда  $A = \sum_{k_1=1}^{\dim \mathcal{X}} \sum_{k_2=1}^{\dim \mathcal{F}} \alpha_{k_1, k_2} E_{k_1, k_2}$ , где  $E_{k_1, k_2}$  — линейный оператор, матричные элементы которого в произвольном фиксированном базисе равны 0, за исключением матричного элемента  $k_1$ -й строки  $k_2$ -го столбца, который равен 1,  $\alpha_{k_1, k_2}$  — матричные элементы  $A$ ,  $k_1 = 1, \dots, \dim \mathcal{X}$ ,  $k_2 = 1, \dots, \dim \mathcal{F}$ ,  $K = \dim \mathcal{X} \dim \mathcal{F}$ . В другом крайнем случае требуется уточнить только «коэффициент усиления»  $A$ ,  $A = \alpha_1 A_1$ ,  $K = 1$ .

Постановка задачи (оптимального) восстановления модели ИП в значительной степени определяется тем, как в дальнейшем будет использована эта модель, поскольку критерий качества восстановления должен быть связан с критерием качества «использования» модели. Например, в задаче прогноза измерения, в которой требуется получить отклик  $A$  на входной сигнал  $f$ , который реально не может быть подан на вход ИП, значение  $Af$  рассчитывается на основе модели  $A$ , восстановленной путем измерений известных (тестовых) сигналов  $g_1, \dots, g_s$ . В этой задаче на основании измерений

$$\zeta_i = Ag_i + \mu_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (6)$$

где  $\mu_i$  — погрешность  $i$ -го тестового измерения, требуется получить наиболее точную версию  $Af$ , что и определяет критерий качества оценивания  $A$ .

Измерения (6) с учетом представления  $A$  в виде (5) могут быть записаны в виде схемы измерения  $\alpha$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_s \end{pmatrix}}_{\zeta} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 g_1 \cdots A_K g_1 \\ \vdots \cdots \vdots \\ A_1 g_s \cdots A_K g_s \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix}}_{\alpha} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \end{pmatrix}}_{\mu}. \quad (7)$$

Соответственно

$$Af = \sum_{k=1}^K \alpha_k A_k f = \underbrace{(A_1 f, \dots, A_K f)}_{U_f} \alpha \quad (8)$$

и рассматриваемая задача оказывается идентичной (2), если известен ковариационный оператор  $\Sigma_\mu$  погрешности тестовых измерений  $\mu$ . Соответственно необходимое и достаточное условие возможности линейного прогноза (т.е. возможности оценить погрешность прогноза) имеет вид  $U_f(I - T^{-1}T) = 0$ . То же самое можно выразить в форме включения  $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(U_f)$ , означающего, что для любых  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ , удовлетворяющих условию  $\sum_{k=1}^K \alpha_k A_k g_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, s$ , должно выполняться равенство  $\sum_{k=1}^K \alpha_k A_k f = 0$ . Наиболее точной (в с.к.) линейной версией  $Af$  будет

$$\widehat{Af} = U_f(\Sigma_\mu^{-1/2}T)^{-1}\Sigma_\mu^{-1/2}\zeta, \quad (9)$$

с.к. погрешность которой равна

$$\mathbb{E}\|\widehat{Af} - Af\|^2 = \text{tr } U_f(T^*\Sigma_\mu^{-1}T)^{-1}U_f^*. \quad (10)$$

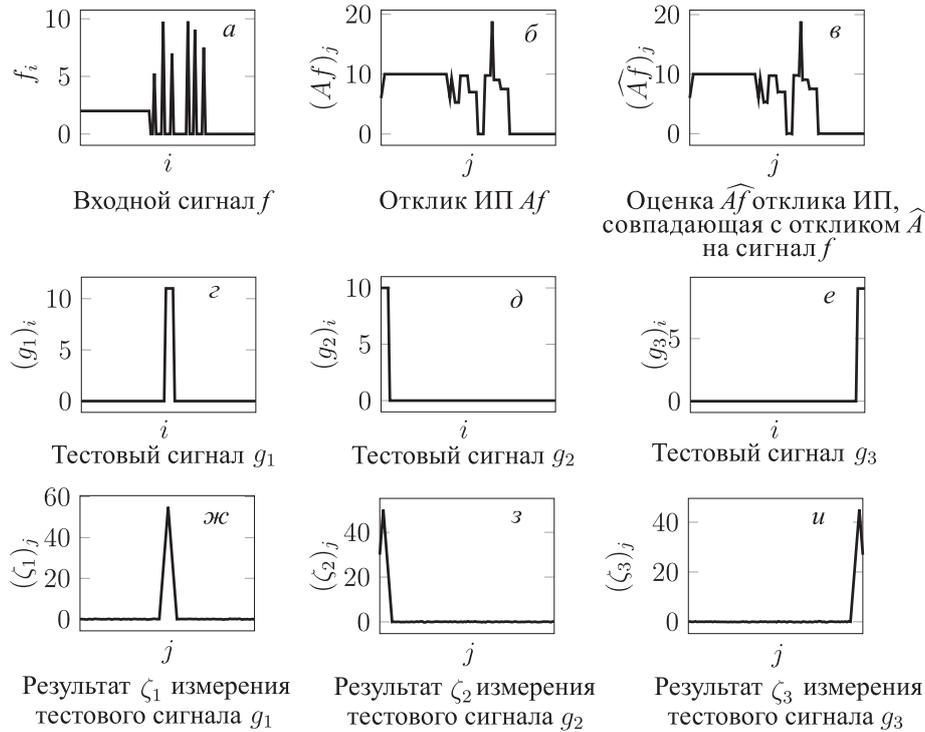


Рис. 1. Прогноз (в) результата (б) измерения (а). Исследователю известны результаты  $\zeta_1 - \zeta_3$  (ж-и) тестовых измерений известных сигналов  $g_1 - g_3$  (г-е), пораженные белым шумом с дисперсией  $\sigma^2 = 10^{-2}$ , входной сигнал (а), отклик ИП на который его интересует, и то, что ИП описывается симметричной аппаратной функцией ширины не более 11. В действительности же  $A$  соответствует прямоугольной аппаратной функции (11) ширины 5. Видно, что отклик и его прогноз отличаются незначительно

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу оценивания отклика  $Af$  ИП на заданный входной сигнал  $f$  с помощью тестовых измерений по схеме (6), если о матрице  $A$  известно, что это трепещивая симметричная ленточная матрица с ограниченной шириной ленты, т. е. матричные элементы  $A_{ij} = a_{|i-j|}$ ,  $|i-j| \leq c$ ,  $A_{ij} = 0$ ,  $|i-j| > c$ . Матричные элементы фактически использовавшегося оператора  $A$  выбраны следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j| \leq (\omega-1)/2, \\ 0, & |i-j| > (\omega-1)/2, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, M, \quad (11)$$

где  $\omega = 5$  — «ширина» аппаратной функции измерительного преобразователя, моделируемого оператором  $A$ , а случайные погрешности измерений имеют нулевое математическое ожидание и корреляционный оператор  $\Sigma_\nu = \sigma^2 I$ . Результаты оценивания в этом случае приведены на рис. 1.

Решение задачи восстановления модели  $A$  может быть получено аналогично, если заметить, что

$$A = \sum_{k=1}^K \alpha_k A_k = \underbrace{(A_1, \dots, A_K)}_{U_A} \alpha,$$

откуда самая точная в с. к. (в смысле нормы Гильберта-Шмидта  $\|\cdot\|_{\text{hs}}$ ) линейная оценка  $\hat{A}$  оператора  $A$  получается из (9) заменой  $U_j$  на  $U_A$ :

$$\hat{A} = U_A (\Sigma_\mu^{-1/2} T)^{-1} \Sigma_\mu^{-1/2} \zeta, \quad (12)$$

а ее погрешность  $\mathbb{E} \|\hat{A} - A\|_{\text{hs}}^2 = \text{tr} U_A (T^* \Sigma_\mu^{-1} T) - U_A^*$  конечна при условии  $U_A (I - T^* T) = 0$ . Как видно, если погрешность оценивания  $A$  конечна, то  $\hat{A} f = \hat{A} f$  для любого  $f$ , что связано с тем, что характеризующие погрешности  $\mathbb{E} \|\hat{A} - A\|_{\text{hs}}^2$  и  $\mathbb{E} \|\hat{A} f - A f\|$  нормы  $\|\cdot\|_{\text{hs}}$  и  $\|\cdot\|$  в известном смысле согласованы.

## 2. Восстановление модели оптимального вычислительного преобразователя

Пусть, в отличие от рассмотренного во введении случая, оператор  $A$  исследователю неизвестен, однако ему доступны результаты измерений по схеме (1)  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  известных (тестовых) сигналов  $g_1, \dots, g_s$ ,  $\zeta_i = A g_i + \mu_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , где шумы  $\mu_1, \dots, \mu_s$  имеют нулевое математическое ожидание, невырожденный ковариационный оператор  $\Sigma_\mu$  и  $\nu$  и  $\mu_1, \dots, \mu_s$  независимы. Исследователя интересует наиболее точная версия характеристики  $Uf$  исследуемого объекта по этим данным и априорной информации об ИП.

Пусть также известно, что оптимальный оператор редукции  $R_*$  в (2), соответствующий неизвестному  $A$  и реализуемый оптимальным вычислительным преобразователем, допускает представление

$$R_* = \sum_{i=1}^K r_i R_i, \quad (13)$$

где линейные операторы  $R_1, \dots, R_K$  известны (определяются априорной информацией о приборе), а вектор  $r = (r_1, \dots, r_K)^T$  — нет. Например, если известно,

что оператор  $A$  допускает разложение (5), в качестве  $R_1, \dots, R_K$  естественно выбрать базис минимального (по включению) линейного пространства, включающего

$$\left\{ U(\Sigma_\nu^{-1/2} A')^{-1} \Sigma_\nu^{-1/2} \left| A' = \sum_{k=1}^{K'} \alpha_k A_k \right. \right\}, \quad (14)$$

где числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$  принимают все априори возможные значения. В частности, если уточняется только «коэффициент усиления»,  $K' = 1$ ,  $A = \alpha_1 A_1$ , то  $K = 1$ ,  $R_1 = U(\Sigma_\nu^{-1/2} A_1)^{-1} \Sigma_\nu^{-1/2}$ , если же оператор  $\Sigma_\nu$  — невырожденный, а оператор  $A$  полностью неизвестен,  $A = \sum_{k_1=1}^{\dim \mathcal{X}} \sum_{k_2=1}^{\dim \mathcal{F}} \alpha_{k_1, k_2} E_{k_1, k_2}$ , где  $E_{k_1, k_2}$  — линейный оператор, матричные элементы которого в произвольном фиксированном базисе равны 0, за исключением матричного элемента  $k_1$ -й строки  $k_2$ -го столбца, который равен 1, то  $K' = \text{rk } U \cdot \dim \mathcal{X}$ ,  $R_1, \dots, R_N$  — произвольный базис линейного пространства линейных операторов  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ , т. е.

$$R = \sum_{k_1=1}^{\text{rk } U} \sum_{k_2=\dim \mathcal{X}} r_{k_1, k_2} E'_{k_1, k_2}, \quad (15)$$

где  $E'_{k_1, k_2}$  — линейный оператор, матричные элементы которого равны 0, за исключением матричного элемента  $k_1$ -й строки  $k_2$ -го столбца, который равен 1, в произвольном фиксированном базисе  $\mathcal{X}$  и произвольном фиксированном базисе  $\mathcal{U}$ , первые  $\text{rk } U$  векторов которого образуют базис образа  $U$ .

При этих условиях значения  $Ug_1, \dots, Ug_s$  могут рассматриваться как пораженные шумами  $R\mu_1, \dots, R\mu_s$  отклики оптимального ВП на сигналы  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ , а  $R_*\xi$  для известного  $A$  — как его отклик на сигнал  $\xi$ . Иными словами, тестовые измерения могут быть записаны в виде схемы измерения вектора  $r$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Ug_1 \\ \vdots \\ Ug_s \end{pmatrix}}_v = \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 \zeta_1 & \cdots & R_K \zeta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 \zeta_s & \cdots & R_K \zeta_s \end{pmatrix}}_S \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_K \end{pmatrix}}_r + \underbrace{\begin{pmatrix} R_* \mu_1 \\ \vdots \\ R_* \mu_s \end{pmatrix}}_\theta, \quad (16)$$

а интересующая исследователя наиболее точная версия отклика оптимального ВП — в виде

$$R_*\xi = \sum_{k=1}^K r_k R_k \xi = \underbrace{(R_1 \xi, \dots, R_K \xi)}_{U_\xi} r, \quad (17)$$

аналогично рассмотренной в разд. 1 задаче прогнозирования отклика измерительного прибора, но, в отличие от нее, ковариационный оператор случайного вектора  $\theta$  неизвестен, поскольку неизвестен сам оператор  $R_*$ . Таким образом, задача оценивания сводится к задаче вида (4).

**Теорема 1.** Если оператор  $A$  исследователю неизвестен, но ему доступны результаты измере-

ний по схеме (1)  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  известных сигналов  $g_1, \dots, g_s$ ,  $\zeta_i = Ag_i + \mu_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , где шумы  $\mu_1, \dots, \mu_s$  имеют нулевое математическое ожидание, невырожденный ковариационный оператор  $\Sigma_\mu$  и  $\nu$  и  $\mu_1, \dots, \mu_s$  независимы, а оператор редукции  $R_*$  измерения  $\xi$  к  $Uf$  при истинном  $A$  допускает представление  $R_* = \sum_{i=1}^K r_i R_i$ , где линей-

ные операторы  $R_1, \dots, R_K$  известны, то наиболее точная линейная несмещенная оценка  $\widehat{Uf}$  интересующей исследователя характеристики  $Uf$  есть

$$\widehat{Uf} = U_\xi S^{-1} v = \widehat{R}\xi, \quad (18)$$

где  $\widehat{R} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^K R_k (S^{-1} v)_k$ ,  $U_\xi \stackrel{\text{def}}{=} (R_1 \xi, \dots, R_K \xi)$ ,  $S \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} R_1 \zeta_1 & \cdots & R_K \zeta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 \zeta_s & \cdots & R_K \zeta_s \end{pmatrix}$ ,  $v \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Ug_1 \\ \vdots \\ Ug_s \end{pmatrix}$ . Ее с.к. погрешность конечна при выполнении условий  $U_\xi(I - S^{-1}S) = 0$  и  $U(I - A^{-1}A) = 0$ .

*Доказательство.* Несмещенность и оптимальность полученной оценки следует из несмещенности и оптимальности [1, § 1.6]  $R_*\xi$  как оценки  $Uf$ , несмещенности и оптимальности [1, § 6.5.4] (также см. разд. 1)  $UxS^{-1}v$  как оценки  $R_*x$  при любом  $x \in \mathcal{X}$  и независимости  $U_\xi$  и  $S^{-1}v$  (вследствие независимости  $\nu$  и  $\mu_1, \dots, \mu_s$ ).

То, что с.к. погрешность полученной оценки конечна при выполнении условия  $U_\xi(I - S^{-1}S) = 0$ , следует из свойств оценки (4) (при указанных условиях конечна погрешность оценки коэффициентов в разложении (13) и, следовательно, конечно с.к. отклонение  $\widehat{R}\xi$  от  $R_*\xi$ ; с.к. отклонение  $R_*\xi$  от  $Uf$  также конечно). ■

Восстановленный таким образом  $R_*$  будет, вообще говоря, отличаться от  $U(\Sigma_\nu^{-1/2} \widehat{A})^{-1} \Sigma_\nu^{-1/2}$ , где  $\widehat{A}$  — восстановленная согласно (12) модель измерительного преобразователя.

*Замечание 1.* Хотя, как отмечалось выше, ковариационный оператор случайного вектора  $\theta$  неизвестен, поскольку заранее неизвестен сам оператор  $R_*$ , в случае если погрешности тестовых измерений  $\mu_1, \dots, \mu_s$  не коррелируют и имеют одинаковые ковариационные операторы, качество оценки (18) такое же, как и качество аналогичной оценки при известном ковариационном операторе  $\Sigma_\theta$ .

В случае если указанное условие не выполняется, учесть ковариационный оператор  $\Sigma_\mu$  погрешностей тестовых измерений можно, используя вместо (18) оценку  $\widehat{R}_{\text{пл}}\xi$ , где  $\widehat{R}_{\text{пл}}$  — решение системы уравнений

$$\begin{cases} R = \sum_{k=1}^K R_k \left( (\widehat{\Sigma}_\theta^{-1/2} S)^{-1} \widehat{\Sigma}_\theta^{-1/2} v \right)_k, \\ \widehat{\Sigma}_\theta = R^{(s)} \Sigma_\mu R^{(s)}, \end{cases}$$

аналогичного (18) в случае известного  $\Sigma_\theta$  при его замене оценкой, полученной с помощью оценки  $R_*$ .

Если погрешности тестовых измерений  $\mu_1, \dots, \mu_s$  не коррелируют и имеют одинаковые ковариационные операторы, то оценки  $\widehat{R}\xi$  и  $\widehat{R}_{\text{пл}}\xi$  совпадают.

*Замечание 2.* В силу независимости  $U_\xi$  и  $S^{-\nu}$  и поскольку  $(\mathbb{E}U_\nu^*U_\nu)_{kk'} = (\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{hs}}$ , то с.к. погрешность

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\widehat{Uf} - Uf\|^2 &= \text{tr} \mathbb{E}U_\xi^*U_\xi \mathbb{E}(S^{-\nu})(S^{-\nu})^* - \text{tr}(Uf)(Uf)^* = \\ &= \text{tr} \mathbb{E}U_\nu^*U_\nu \mathbb{E}(S^{-\theta})(S^{-\theta})^* = \\ &= \sum_{k,k'=1}^K (\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{hs}} (S^{-R_*^{(s)}\Sigma_\mu R_*^{(s)*}S^{-*}})_{kk'} \approx \\ &\approx \sum_{k,k'=1}^K (\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{hs}} (S^{-\widehat{R}^{(s)}\Sigma_\mu \widehat{R}^{(s)*}S^{-*}})_{kk'}, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $R_*^{(s)} = \begin{pmatrix} R_* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_* \end{pmatrix}$  — блочно-диагональная матрица ( $s \times s$  блоков),  $\Sigma_\mu$  — матрица ковариационного оператора случайного вектора  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \end{pmatrix}$ ,

и в последнем (приближенном) равенстве вместо  $R_*$  используется его оценка  $\widehat{R}$  вследствие ее оптимальности в классе линейных оценок.

Как можно заметить, в погрешности (19) матрица, образуемая элементами  $(\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{hs}}$ ,  $k, k' \in 1, \dots, K$ , характеризует вклад в погрешность неточности измерения  $\xi = Af + \nu$ , а матрица  $S^{-\widehat{R}^{(s)}\Sigma_\mu \widehat{R}^{(s)*}S^{-*}}$  — вклад неточности тестовых измерений. Поэтому если  $\|S^{-\widehat{R}^{(s)}\Sigma_\mu \widehat{R}^{(s)*}S^{-*}}\|_{\text{hs}} \ll \sum_{k,k'=1}^K (\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{hs}}^2$ , то для повышения точности оценки интересующей исследователя характеристики целесообразно повторить измерение, а в противоположном случае  $\|S^{-\widehat{R}^{(s)}\Sigma_\mu \widehat{R}^{(s)*}S^{-*}}\|_{\text{hs}} \gg \sum_{k,k'=1}^K (\Sigma_\nu, R_k^*R_{k'})_{\text{hs}}^2$  — произвести больше тестовых измерений.

*Замечание 3.* Поскольку в (17) не используется ковариационный оператор случайного вектора  $\theta$ , утверждение теоремы 1 выполняется и в том случае, когда  $g_1, \dots, g_s$  также известны не точно, а со случайной погрешностью с нулевым математическим ожиданием.

Выполнение условия представимости  $R_*$  в виде (13), как правило, менее очевидно, чем выполнение условия представимости  $A$  в виде (5). Поэтому может быть целесообразно использовать наиболее

общее и всегда априори допустимое представление (15) и имеющиеся у исследователя представления о том, как будет изменяться выходной сигнал ИП при известном изменении его входного сигнала, согласно следующему замечанию.

*Замечание 4.* Имеющаяся у исследователя информация о структуре оператора  $A$  может также быть учтена следующим образом. Пусть  $B: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $C: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  — такие линейные операторы, что для тестового сигнала  $g_1$  выполняется  $ABg_1 = CAg_1$  для всех априори возможных  $A$  (например, для оператора «сдвига», соответствующих смещению регистрируемого сигнала). Тогда если  $\zeta_1$  — результат измерения тестового сигнала  $g_1$ , то  $C\zeta_1$  может рассматриваться как результат измерения тестового сигнала  $Bg_1$  (разумеется, с другим ковариационным оператором шума  $C\Sigma_{\mu_1}C^*$ , что не влияет на значение (18)).

Этот подход применим и в случае восстановления модели линейного ИП, но там он не предпочтителен по сравнению с «более явным» выражением информации о структуре и симметрии ИП заданием разложения (5), поскольку увеличивает объем вычислений при одинаковом результате. В этом же случае представление (13), выражающее информацию о ВП, может передавать ее не полностью, например при  $K \geq K'$  в (14), и, следовательно, без применения этого замечания для восстановления модели оптимального ВП требуется больше тестовых измерений, чем для восстановления используемого в паре с ним ИП. Условия замечания 1 при этом, очевидно, не выполняются.

В отличие от [15, 17, 18], в этом замечании не предполагается, что допустимые преобразования образуют группу, что может быть существенно при учете «краевых эффектов»<sup>1</sup>, в частности не требуется обратимость  $B$  и  $C$ , и не требуется совпадения  $B$  и  $C$ .

В качестве иллюстрации применения теоремы 1 и замечания 4 рассмотрим задачу оценивания входного сигнала  $f$  ИП (т.е.  $U = I$ ) по его измерению  $\xi$ , полученному по схеме (1), и тестовым измерениям по схеме (6), если известно, что матрица  $A$  — симметричная теплицева. Поскольку при этом  $A$  — симметричный оператор типа свертки, то в замечании 4  $B$  и  $C$  — операторы «сдвига» и «отражения» сигнала. Матричные элементы истинного оператора  $A$  определяются формулой (11) при  $\omega = 5$ , а случайные погрешности измерений имеют нулевое математическое ожидание и корреляционный оператор  $\Sigma_\nu = \sigma^2 I$ . Результаты оценивания в этом случае приведены на рис. 2.

Решение задачи оптимального в с.к. (в смысле

<sup>1</sup> Например, пусть тестовый сигнал  $g_2$  и результат его измерения  $\zeta_2$ , изображенные на рис. 2е, и, «сдвигаются влево» операторами  $B$  и  $C$  так, что  $Bg_2 = 0$ , но  $C\zeta_2 \neq 0$ , т.е. на расстояние, меньшее ширины аппаратной функции. Тогда  $C\zeta_2$  не может быть результатом измерения  $Bg_2$ , что, если множество допустимых отображений должно быть группой, требует отклонить всю группу сдвигов в качестве допустимых отображений.

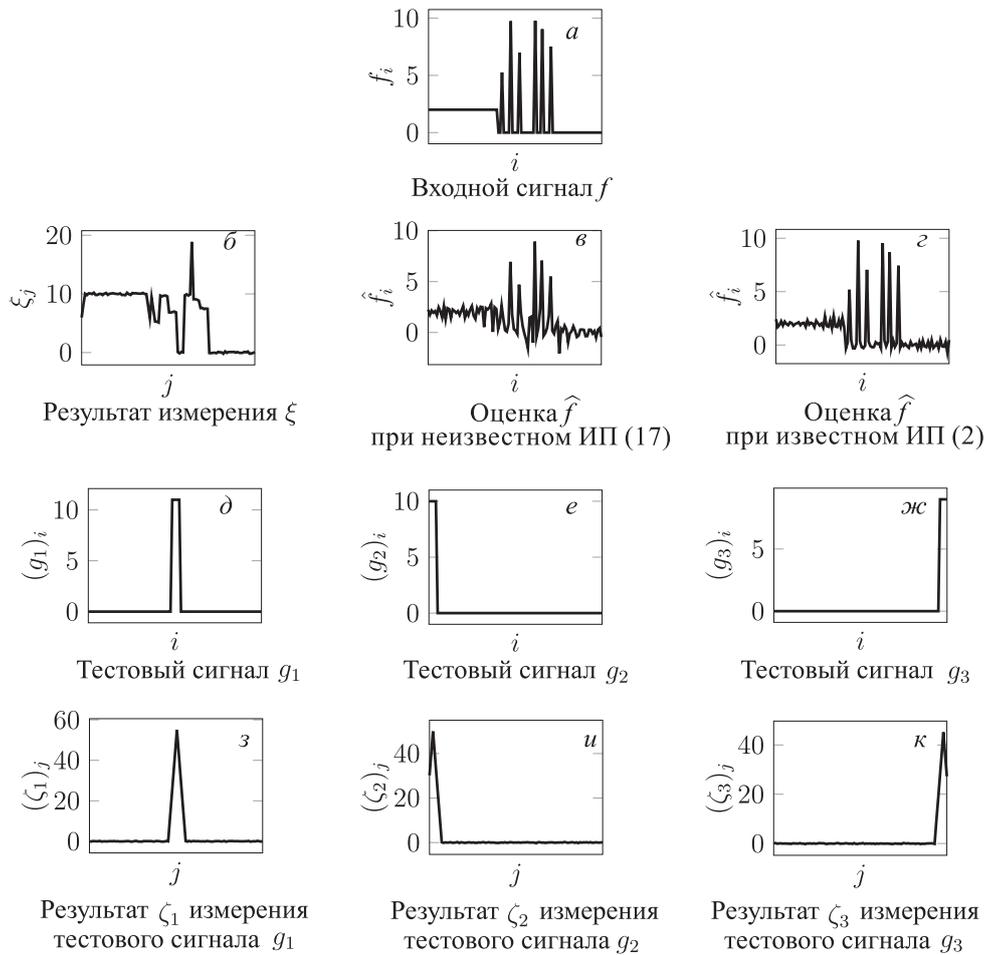


Рис. 2. Редукция результата (б) измерения (а): (в) — исследователь имеет результаты (ж–к) измерений тестовых сигналов (д–ж)  $g_1, g_2, g_3$ , результат измерения интересующего его сигнала (б) и знает, что  $A$  — симметричный оператор типа свертки; (г) — исследователь имеет результат измерения интересующего его сигнала (б) и точно знает  $A$ . Все результаты измерений поражены белым шумом с дисперсией  $\sigma^2 = 10^{-2}$ . Истинный  $A$  соответствует прямоугольной аппаратной функции ширины 5. Видно, что всего трех тестовых измерений и априорной информации о виде  $A$  достаточно для синтеза оценки  $\hat{f}$ , на которой уверенно различимы «пики» и «плато» исходного сигнала

нормы Гильберта–Шмидта  $\|\cdot\|_{\text{HS}}$  восстановления  $R_*$  может быть получено аналогично, если заметить, что

$$R_* = \sum_{k=1}^K r_k R_k = \underbrace{(R_1, \dots, R_K)}_{U_R} r,$$

откуда самая точная в с. к. (в смысле нормы Гильберта–Шмидта  $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ ) линейная оценка  $\hat{R}$  оператора  $R_*$  получается из (18) заменой  $U_f$  на  $U_R$ :

$$\hat{R} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^K R_k (S^- v)_k,$$

а ее погрешность конечна при условии  $U_R(I - S^- S) = 0$ .

### Заключение

Как показано в статье, в случае неизвестной исследователю точной модели ИП, но при возможности проведения тестовых измерений, исследователь может синтезировать с помощью тестовых измерений как отклик ИП, так и результат оптимальной

интерпретации результата измерения, причем и то и другое — оптимальным (в с. к.) образом. Имеющаяся у исследователя информация о симметрии ИП (например, если моделирующий ИП оператор — типа свертки, то результаты одновременных «сдвигов» и «отражений» возможных входных сигналов и измерений также являются возможными входными сигналами и измерениями) также может быть учтена, что может существенно сокращать количество тестовых измерений, требуемое для достижения приемлемой для исследователя точности интерпретации. При этом предложенный в статье метод не требует априорного знания того, что входной сигнал — случайный вектор с известным математическим ожиданием и ковариационным оператором.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ю. П. Пытьеву за постоянное внимание к работе и ее обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-07-00441).

## Список литературы

1. *Пытьев Ю.П.* // Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. 3-е изд., перераб. и доп. М., 2012.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* // Нелинейные некорректные задачи. М., 1995. (*Leonov A.S., Tikhonov A.N., Yagola A.G.* // *Nonlinear Ill-Posed Problems*. London, 1995.)
3. *Боровков А.А.* // Математическая статистика. 4-е изд. СПб., 2010. (*Borovkov A.A.* // *Mathematical Statistics*. London, 1999.)
4. *Caron J.N., Namazi N.M., Rollins C.J.* // *Applied Optics*. 2002. **41**, № 32. P. 6884.
5. *Krishnan D., Tay T., Fergus R.* // *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2011 IEEE Conference. Providence, RI, 2011. P. 233.
6. *Pan J., Liu R., Su Z., Gu X.* // *Signal Processing: Image Communication*. 2013. **28**, № 9. P. 1156.
7. *Levin A., Weiss Y., Durand F., Freeman W.T.* // *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2011 IEEE Conference. Providence, RI, 2011. P. 2657.
8. *Голубцов П.В., Пытьев Ю.П., Чуличков А.И.* // Все-союзный симпозиум по модульным информационно-вычислительным системам. Кишинев, 1985. С. 245.
9. *Голубцов П.В., Пытьев Ю.П., Чуличков А.И.* // Дискретные системы обработки информации. Устинов, 1986. С. 68.
10. *Голубцов П.В., Гоголинская Т.А., Ким Е.М. и др.* // III съезд советских океанологов: Тез. докл. Секция физика и атмосфера океана, техника, методы измерений и обработки данных. Л., 1987. С. 32.
11. *Гоголинская Т.А., Голубцов П.В., Ким Е.М. и др.* // Морской гидрофиз. журн. 1988. № 1. С. 59.
12. *Баулин Б.В., Гоголинская Т.А., Голубцов П.В. и др.* // Оптика атмосферы. 1988. **1**, № 12. С. 53.
13. *Голубцов П.В.* Методы калибровки модели измерения для решения задач редукации: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1988.
14. *Голубцов П.В., Пытьев Ю.П., Филатова С.А.* // Оптика атмосферы. 1991. **4**, № 10. С. 1011.
15. *Голубцов П.В., Старикова О.В.* // Информационные процессы. 2001. **1**, № 1. С. 78.
16. *Старикова О.В., Голубцов П.В.* // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. III Междунар. конф. Самара, 2001. С. 635.
17. *Голубцов П.В., Старикова О.В.* // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 2001. № 6. С. 3. (*Golubtsov P.V., Starikova O.V.* // *Moscow University Phys. Bull.* 2001. **56**, N 6. P. 1.)
18. *Голубцов П.В., Старикова О.В.* // Матем. моделирование. 2002. **14**, № 4. С. 45.
19. *Копит Т.А., Чуличков А.И., Устинин Д.М.* // Вычисл. методы и программирование: Новые вычисл. технол. 2011. **12**. С. 90.
20. *Копит Т.А., Чуличков А.И., Устинин Д.М.* // Вычисл. методы и программирование: Новые вычисл. технол. 2011. **12**. С. 220.
21. *Копит Т.А., Чуличков А.И.* // Сложные системы. 2012. № 1(2). С. 7.
22. *Черемухин Е.А., Чуличков А.И.* // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 2004. № 3. С. 15. (*Cheremukhin E.A., Chulichkov A.I.* // *Moscow University Phys. Bull.* 2004. **59**, N 3. P. 19.)

### The empirical construction of mathematical models of measuring and optimal computing transducers D. A. Balakin

*Department of Mathematical Modeling and Computer Science, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail: balakin\_d\_a@physics.msu.ru.*

It follows from the theory of measuring-computing systems [1] that the requirements for a measuring transducer (MT) that converts an external influence into an electric signal in order to obtain the maximal interpretation accuracy are significantly different depending on how it is going to function: by itself or as a part of a measuring-computing transducer (MCT) as its component. In the first case, the maximal accuracy has to be provided by the MT and it is bounded by physical laws. In the second case, it has to be provided by the MCT, which is considered to be a measuring device for the same or a different purpose, in particular, that of the "perfect" device for a researcher.

The accuracy of an MCT is determined by both the mathematical properties of its model and the "quality" of the algorithm that converts MT output into a form determined by the measurement objective that is achieved by a computing transducer (CT) as a component of the MCT. For any specific mathematical model of the MCT this algorithm has to provide the maximal quality of the MCT. An MT that is optimal for that purpose can often be different from an MT that is optimal by itself.

As a rule, the exact mathematical model of the MT and, hence, the algorithm of the CT that is optimal for it, are not known to the researcher, but he can perform test measurements of known input signals that simulate the interaction of the MT and the measured object using the MT. The aim of this article is to use test measurements to synthesize both the response of an MT with an unknown model and the optimal interpretation of the measurement result, i. e., the output signal of the MCT. It is shown that even without knowing the exact MT model, but with the ability to perform test measurements on the same MT a researcher is able to synthesize both the MT response and the results of the interpretation of measurement results, both in an optimal way.

*Keywords:* measurement reduction, optimal decisions, measuring-computing systems, test measurements.

*PACS:* 02.50.Le.

*Received 5 July 2016.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **72**, No. 2. Pp. 168–175.

#### Сведения об авторе

Балакин Дмитрий Александрович — аспирант; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: balakin\_d\_a@physics.msu.ru.