СТАТЬИ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О выделении особенностей оператора парциальных условий излучения

А. Л. Делицын

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
Главный научно-исследовательский испытательный центр робототехники Минобороны РФ. Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32.
E-mail: delitsyn@mail.ru

Статья поступила 22.05.2016, подписана в печать 05.12.2016.

Рассматривается вопрос о структуре оператора, определяющего парциальные условия излучения в скалярной задаче теории дифракции. Нелокальные краевые условия определяются рядом, задающим некоторый интегро-дифференциальный оператор. Выделяются в явном виде главная часть этого оператора, имеющая вид гиперсингулярного оператора, и члены, имеющие особенности более низкого порядка. Оставшаяся часть ряда определяет интегральный оператор с непрерывным ядром, задаваемый быстро сходящимся рядом.

Ключевые слова: теория дифракции, парциальные условия излучения, выделение особенностей интегро-дифференциального оператора.
УДК: 517.95. PACS: 41.20.Jb.

Введение

Неограниченность области, в которой рассматривается задача дифракции, затрудняет непосредственное применение к ее решению метода конечных элементов. В результате для решения подобных задач широкое распространение получил метод интегральных уравнений. В то же время применение метода интегральных уравнений к анализу задачи дифракции на теле с переменным показателем преломления приводит при решении более или менее реалистичных задач к весьма большим запросам компьютерной памяти, учитывая необходимость решения объемных интегральных уравнений.

Задача дифракции может быть сведена к задаче в конечной области с нелокальными краевыми условиями, что было осуществлено в работах А. Г. Свешникова [1–3]. Применительно к скалярной задаче дифракции подобные условия при применении сеточных методов использовались для дифракции в волноводах в [4] и для дифракции в свободном пространстве в [5, 6] совместно с методом конечных элементов. Приведенные примеры расчетов показывают, что на основе метода конечных элементов возможна разработка программ для решения широкого круга задач дифракции на системе нескольких тел сложной формы. При этом рассеиватели могут быть как проницаемыми, так и непроницаемыми.

Учитывая, что парциальные условия излучения формально подобны условиям третьего рода, задаваемым бесконечным функциональным рядом, возникает вопрос о количестве членов, которые необходимо учитывать при вычислении ряда. Подобный вопрос на практике часто решается эмпирическим путем, на основе серии пробных расчетов, что является не вполне удовлетворительным. Для ответа на вопрос об аппроксимации оператора парциальных условий излучения мы выделяем из функционального ряда главную часть, задаваемую гиперсингулярным интегральным оператором, и операторы с меньшими особенностями до тех пор, пока оставшийся функциональный ряд не становится равномерно сходящимся, при этом общий член ряда не превосходит величины порядка $1/n^3$. Замена бесконечного ряда конечным вносит погрешность, которая элементарно оценивается. Выделение особенностей оператора, задающего парциальные условия излучения, осуществлялась ранее для краевой задачи для уравнений Максвелла [9]. Однако рассмотрение скалярной задачи для уравнения Гельмгольца обладает своей спецификой и приводит к операторам, отличающимся от полученных ранее. Заметим, что еще одним часто применяемый на практике метод — это использование так называемых поглощающих граничных условий [7]. Однако оценка погрешности, которую вносят подобные условия, является самостоятельной задачей, учитывая их приближенный характер.

Постановка задачи и метод ее решения

Рассмотрим краевую задача для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 q(x,y,z)u = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in R^3, \qquad (1)$$

с условиями излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (2)$$

Считаем, что $q \equiv 1$, $f \equiv 0$ вне некоторого шара радиуса R.

Напомним постановку парциальных условий излучения [1]. Как известно [1], решение вне сферы радиуса R представимо в виде

$$u = \sum_{nm} c_{nm} \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} Y^m_n(\theta, \phi), \qquad (3)$$

где $Y^m_n(\theta,\phi) = P^m_n(\cos\theta)e^{im\phi}$, c_{nm} — константы. Дифференцируя представление поля в виде ряда по r и выражая неизвестные константы через значения поля на сфере радиуса R как

$$c_{nm} = \frac{(u, Y^m_n)_{L_2(\Omega)}}{H^{(1)}_{n+1/2}(kR)||Y^m_n||^2_{L_2}},$$

где Ω — сфера радиуса R, получим известное краевое условие [1]

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{nm} \frac{\frac{d}{dr}\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}|_{r=R}}{\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kR)}{\sqrt{R}}} \frac{(u, Y^m_n)_{L_2(\Omega)}}{||Y^m_n||^2_{L_2}}.$$

Таким образом, задача в неограниченнй области сводится [1] к задаче в шаре с краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial r} = Hu,$$

где оператор H определяется рядом

$$Hu = \sum_{nm} \zeta_n \frac{(u, Y^m_n)_{L_2(\Omega)}}{||Y^m_n||^2_{L_2}}, \qquad (4)$$

где коэффициенты ζ_n равняются

$$\zeta_n = \frac{\frac{d}{dr}\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}|_{r=R}}{\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kR)}{\sqrt{R}}}.$$

Докажем, что коэфициенты ζ_n растут как n. Отсюда следует, что H не является интегральным оператором.

Оператор H представим в виде суммы интегро-дифференциального оператора и суммы операторов со все менее сингулярными ядрами. Преобразуем ζ_n следующим образом:

$$\zeta_n = \frac{\frac{d}{dr}\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}|_{r=R}}{\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kR)}{\sqrt{R}}} = -\frac{1}{2R} + k\frac{\frac{d}{dx}H_{n+1/2}(x)}{H_{n+1/2}}\bigg|_{x=kR} \frac{\frac{d}{dx}H_{n+1/2}(x)}{H_{n+1/2}} = -\frac{n+\frac{1}{2}}{x} + \frac{x}{2\left(n-\frac{1}{2}\right)} + R_n.$$

Докажем, что $|R_n| \leqslant \frac{C}{n^3}$. Используя рекуррентные формулы для H_ν [8], преобразуем $\frac{d}{dx}H_\nu/H_\nu$ к виду

$$\frac{\frac{d}{dx}H_\nu}{H_\nu} = -\frac{\nu}{x} + \frac{x}{2(\nu-1)\left(1 - \frac{x}{2(\nu-1)}\frac{H_{\nu-2}}{H_{\nu-1}}\right)} = -\frac{\nu}{x} + \frac{x}{2(\nu-1)} + R_\nu(x),$$

где

$$R_\nu = \frac{x}{2(\nu-1)\left(1 - \frac{x}{2(\nu-1)}\frac{H_{\nu-2}}{H_{\nu-1}}\right)} - \frac{x}{2(\nu-1)} = -\left(\frac{x}{2(\nu-1)}\right)^2 \frac{H_{\nu-2}}{H_{\nu-1}} \frac{1}{1 - \frac{x}{2(\nu-1)}\frac{H_{\nu-2}}{H_{\nu-1}}} =$$
$$= -\frac{x^2}{8}\frac{1}{(\nu-1)^2(\nu-2)} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{2(\nu-2)}\frac{H_{\nu-3}}{H_{\nu-2}}\right)\left(1 - \frac{x}{2(\nu-1)}\frac{H_{\nu-2}}{H_{\nu-1}}\right)}.$$

Из формулы Никольсона [8] следует: $\left|\frac{H_{\nu-1}}{H_\nu}\right| \leqslant 1$ $\forall\, \nu \geqslant 1$. В результате

$$\left(1 - \frac{x}{2(\nu-2)}\frac{H_{\nu-3}}{H_{\nu-2}}\right)\left(1 - \frac{x}{2(\nu-1)}\frac{H_{\nu-2}}{H_{\nu-1}}\right) \geqslant \frac{1}{C},$$

где C — константа. Отсюда $|R_\nu| \leqslant \frac{C}{\nu^3}$. В результате

$$\frac{\frac{d}{dx}H_{n+\frac{1}{2}}(x)}{H_{n+1/2}} = -\frac{n+\frac{1}{2}}{x} + \frac{x}{2(n-\frac{1}{2})} + R_n,$$

где $|R_n| \leqslant \frac{C}{n^3}$.

Отсюда вытекает, что коэффициенты ζ_n представимы в виде

$$\zeta_n = -\frac{n}{R} - \frac{1}{R} + \frac{k^2 R}{2\left(n-\frac{1}{2}\right)} + R_n, \quad |R_n| \leqslant \frac{C}{n^3}.$$

Не составляет труда получить большее число членов в разложении ζ_n, что приводит лишь к более громоздким формулам для остаточного члена. Для нас важно, что

$$R_n = \frac{C}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\left(n-\frac{3}{2}\right)} + \overline{R}_n,$$

где C — константа, $|\overline{R}_n|$ убывает как $\frac{1}{n^5}$.

Наша цель — явное определение операторов, выделяемых главными членами ряда. Используем следующие известные формулы:

$$\frac{R^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_{M_0}}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial n_M}\frac{1}{r_{MM_0}} Y^m_n(\theta,\phi)\,d\Omega = \frac{n(n+1)}{R(2n+1)} Y^m_n(\theta_0,\phi_0). \qquad (5)$$

Данная формула, приведенная в [10], позволяет выделить интегро-дифференциальный (гиперсингулярный) оператор из (4).

Кроме того, будем применять приведенное в [10] соотношение

$$\frac{R^2}{4\pi}\int_\Omega \frac{1}{r_{MM_0}} Y^m_n(\theta,\phi)\,d\Omega = \frac{R}{2n+1} Y^m_n(\theta_0,\phi_0). \qquad (6)$$

Формулы (5), (6) позволяют преобразовать ряды, связанные с главным членом $\frac{n}{R}$ в разложении ζ_n в представлении оператора H (4) к явно задаваемых интегро-дифференциальному и интегральному операторам.

Для преобразования рядов, связанных с членом $\frac{k^2R}{2\left(n-\frac{1}{2}\right)}$, будем использовать формулу

$$-\frac{1}{2\pi R^2}\int\limits_\Omega \ln\sin\frac{\gamma}{2}Y_n^m(\theta,\phi)\,d\Omega = \frac{1}{n(n+1)}Y_n^m(\theta_0,\phi_0), \tag{7}$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)$, γ — угол между векторами $\boldsymbol{r}_M$ и $\boldsymbol{r}_{M_0}$, приведенную в [11], и формулу (см. [12])

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}P_n(x), \tag{8}$$

откуда получим

$$\sqrt{1-\cos\frac{\gamma}{2}} = \sin\frac{\gamma}{2} = $$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}P_n(\cos\gamma) = $$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\sum_{nm}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{Y_n^m(\phi,\theta)Y_n^m(\theta_0,\phi_0)}{||Y_n^m||^2}.$$

Преобразуем ряд, определяющий оператор, следующим образом. В силу

$$\frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2n+2} - \frac{n}{2(2n+1)}$$

получим

$$-\sum_{nm}\frac{n}{R}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}Y_n^m = -2\sum_{nm}\frac{1}{R}\frac{n(n+1)}{2n+1}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2} + $$
$$+\sum_{nm}\frac{1}{R}\frac{n}{2n+1}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}Y_n^m.$$

В результате

$$-\sum_{nm}\frac{1}{R}\frac{n(n+1)}{2n+1}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2} = $$
$$= \sum_{nm}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}\frac{R^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_0}\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{MM_0}}Y_n^m\,d\Omega = $$
$$= \frac{R^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_0}\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{MM_0}}\sum_{nm}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}Y_n^m\,d\Omega = $$
$$= \frac{R^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_0}\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{MM_0}}u\,d\Omega.$$

Таким образом, главная часть оператора H определяется интегро-дифференциальным оператором $\frac{R^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial n_0}\frac{1}{r_{MM_0}}u\,d\Omega$. Далее, поскольку

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)},$$

получим

$$\frac{1}{2R}\sum_{nm}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}Y_n^m = \frac{1}{2R}u.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2R^2}\sum_{nm}\frac{R}{2n+1}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}Y_n^m = $$
$$= \sum_{nm}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}\frac{1}{8\pi}\int\limits_\Omega\frac{Y_n^m}{r_{MM_0}}\,d\Omega = $$
$$= \frac{1}{8\pi}\int\limits_\Omega\frac{Y_n^m}{r_{MM_0}}\sum_{nm}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}\,d\Omega = \frac{1}{8\pi}\int\limits_\Omega\frac{1}{r_{MM_0}}u\,d\Omega.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2n-1} = \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

для члена $\frac{1}{2n+1}$ приходим к уже найденному интегральному оператору.

Остается рассмотреть ряд, определяемый величиной $\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}$.

Учитывая, что

$$\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)} + $$
$$+\frac{6n+3}{8n(n+1)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

выделяем операторы, отвечающие коэффициентам $\frac{1}{n(n+1)}$ и $\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}$:

$$\frac{1}{4}\sum_{nm}\frac{1}{n(n+1)}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}Y_n^m = $$
$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_\Omega\ln\sin\frac{\gamma}{2}\sum_{nm}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}Y_n^m\,d\Omega = $$
$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_\Omega\ln\sin\frac{\gamma}{2}u\,d\Omega.$$

Далее

$$\sum_{nm}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}Y_n^m = $$
$$= \frac{4}{3}\int\limits_\Omega u\,d\Omega - \frac{1}{R}\int\limits_\Omega r_{MM_0}u\,d\Omega.$$

Подобного вида дополнительное слагаемое получится при рассмотрении члена в разложении ζ_n, убывающего как $\frac{1}{n^3}$. Поскольку вычисления аналогичны приведенным, приводить их более не будем.

В результате получим следующее краевое условие на поверхности сферы, ограничивающей область, занятую телами, на которых происходит рассеяние волн, и их источниками:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = C_1\frac{\partial}{\partial n_0}\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{MM_0}}u\,d\Omega + \frac{1}{2}u + C_2\int\limits_\Omega\frac{1}{r_{MM_0}}u\,d\Omega + $$
$$+C_3\int\limits_\Omega\ln\sin\frac{\gamma}{2}u\,d\Omega + C_4\int\limits_\Omega u\,d\Omega + C_5\int\limits_\Omega r_{MM_0}u\,d\Omega + $$
$$+\sum_{nm}\widetilde{R}_n\frac{(u,Y_n^m)_{L_2}}{||Y_n^m||^2}Y_n^m, \tag{9}$$

где коэффициенты C_i, $i = 1, \ldots, 5$, зависят только от k и R и вычисляются в явном виде. При этом коэффициенты $\widetilde{R}_n$ убывают не медленее, чем $\frac{1}{n^4}$.

Заключение

Результаты применения метода конечных элементов к задаче дифракции показывают возможность решения этим методом широкого класса задач с существенно меньшими запросами компьютерного времени и памяти, чем методом интегральных уравнений. Использование парциальных условий излучения позволяет рассматривать краевые условия на сфере, максимально приближенной к рассеивателю.

В то же время встает вопрос о количестве членов ряда, которые необходимо учитывать при задании парциальных условий излучения.

В настоящей работе оператор, определяющий парциальные условия излучения, представлен в виде суммы гиперсингулярного оператора, суммы интегральных операторов с ядрами увеличивающейся гладкости и остатка, определяемого быстро сходящимся рядом. Применение подобного оператора при решении задачи дифракции сеточными методами позволяет оценить погрешность вносимую усечением бесконечного ряда.

Список литературы

1. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.
2. *Свешников А.Г.* // ДАН СССР. 1950. **3**, № 5. С. 517.
3. *Свешников А.Г.* // ДАН СССР. 1951. **80**, № 3. С. 345.
4. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н.* // ЖВМиМФ. 1974. **80**, № 4. С. 947.
5. *Коняев Д.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. № 4. С. 30. (*Konyaev D.A.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2012. **67**, N 4. P. 346.)
6. *Коняев Д.А., Делицын А.Л.* // Математическое моделирование. 2014. № 8. С. 48.
7. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003.
8. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: ИЛ, 1949.
9. *Делицын А.Л.* // ЖВМиМФ. 2009. **80**, № 8. С. 48; № 9. С. 1652.
10. *Лифанов И.К.* Математические модели электродинамики. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995.
11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
12. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: ГИФМЛ, 1963.

Determination of singularities in an operator of partial radiation conditions

A. L. Delitsyn

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
Main Research and Testing Robotics Center of the Ministry of Defense of Russia. Moscow 117997, Russia.
E-mail: delitsyn@mail.ru.

The structure of an operator that determines the partial conditions of radiation in the scalar problem of diffraction theory is considered. Nonlocal boundary conditions are determined by a series setting a certain integro-differential operator. The principal part of this operator is presented in the explicit form of a hypersingular operator and its components with lower-order singularities. The remaining rapidly converging part of the functional series determines an integral operator with a continuous kernel.

Keywords: diffraction theory, partial conditions of radiation, determination of singularities of an integro-differential operator.
PACS: 02.30.Jr.
Received 22 May 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **72**, No. 4. Pp. 340–344.

Сведения об авторе

Делицын Андрей Леонидович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-39-37, e-mail: delitsyn@mail.ru.