

АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Экваториальная асимметрия магнитного поля

М. Ю. Решетняк^{1,2}¹Институт физики Земли РАН. Россия, 123995, Москва, ул. Б. Грузинская, д. 10.²Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн имени Н.В. Пушкова РАН. Россия, 142190, Москва, Калужское ш., д. 4.

E-mail: m.reshetnyak@gmail.com

Статья поступила 10.05.2016, подписана в печать 16.11.2016.

Рассмотрено решение обратной задачи для одномерной модели динамо средних полей Паркера в тонком сферическом слое. Метод позволяет найти пространственное распределение источников энергии: α - и Ω -эффектов, для заданных ограничений на решение. В качестве таких ограничений использовано условие максимального отношения магнитных энергий в Северном и Южном полушариях. Метод является модификацией метода Монте-Карло, удобен для использования на параллельных компьютерах и основан на минимизации штрафной функции, задающей отклонение свойств модельного решения от заданных. Расчеты показывают, что отношение энергий в полушариях может достигать более одного порядка как для полоидальной, так и для тороидальной магнитной энергии. Величина отношения зависит от расстояния эффективной зоны генерации магнитного поля от экватора, а также количества гармоник в спектре. Чем больше это расстояние и больше число гармоник, тем больше может быть асимметрия магнитного поля.

Ключевые слова: модель Паркера, обратная задача, теория динамо.

УДК: 537.84. PACS: 47.65.Md.

Введение

Современные модели динамо описывают трансформацию кинетической энергии течений проводящей жидкости в энергию магнитного поля. Теория позволяет объяснить наблюдаемые магнитные поля во многих астрофизических объектах: галактиках, звездах и планетах [1, 2]. В зависимости от объема имеющихся наблюдений и информации о том или ином объекте используемые модели могут иметь различную степень сложности. В настоящее время можно найти как модели среднего поля, описывающие крупномасштабные черты магнитного поля, так и трехмерные модели динамо, включающие процессы дифференциации вещества, теплообмен и турбулентные эффекты. Моделирование процессов динамо позволяет не только подобрать оптимальные параметры конкретной модели, но и исследовать новые интересные физические эффекты. Далее мы остановимся на исследовании возможности генерации магнитного поля с разным уровнем магнитной энергии в разных полушариях при условии, что источники энергии в модели такой асимметрией не обладают.

Наблюдателям экваториальная асимметрия хорошо знакома. В геомагнетизме асимметрия объяснялась суперпозицией дипольной и квадрупольной мод [3]. Поскольку пороги генерации этих мод близки, их одновременная генерация будет интерпретироваться как сильное магнитное поле в одном полушарии и слабое — в другом. Данный сценарий

не противоречит палеомагнитным наблюдениям за Фанерозой (560 млн лет).

В солнечном динамо экваториальная асимметрия существует как минимум в двух формах. Во-первых, в различии магнитных потоков от каждого из полушарий, так что знак разности потоков может меняться во времени [4]. Другое проявление асимметрии наблюдалось во время минимума Маундера в XVII столетии, когда более 95% солнечных пятен было сконцентрировано в южном полушарии Солнца [5].

Наблюдения планетарных магнитных полей также демонстрируют экваториальную асимметрию. Ярким примером является древнее магнитное поле Марса, зафиксированное в остаточной намагниченности коры, и связываемое с работой механизма динамо в прошлом [6].

Экваториальная асимметрия магнитного поля не противоречит уравнениям динамо и наблюдается в численных моделях. При некотором наборе параметров такие режимы удается воспроизвести в трехмерных моделях динамо в сферической оболочке, включающих уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска со сферически-симметричными граничными условиями [7–9]. Интересно, что в рассмотренных моделях распределение кинетической энергии если и имело экваториальную асимметрию, то намного меньшую, чем для магнитной энергии.

Для случая, когда экваториальная асимметрия течений в конвективных областях могла быть

вызвана процессами в мантиях планет, в трехмерных моделях [6, 10, 11] вводились отклонения теплового потока на внешней границе от сферически-симметричного, что также приводило к появлению экваториальной асимметрии магнитного поля.

Ниже на примере простой модели динамо средних полей мы рассмотрим возможность генерации магнитного поля с высокой степенью экваториальной асимметрии, при условии что сами источники энергии такой асимметрией не обладают. Поскольку рассматриваемая нелинейная одномерная модель Паркера может демонстрировать весьма сложное поведение, для поиска такого решения мы решим обратную задачу по нахождению пространственных распределений источников энергии, позволяющих получить максимальную асимметрию для магнитного поля. Используемый метод решения обратной задачи, впервые адаптированный для уравнений Паркера в [12], позволяет выделить наиболее значимые факторы, приводящие к заданному поведению магнитного поля. Метод легко модифицируется для широкого класса нелинейных задач математической физики высокой пространственной и параметрической размерности.

1. Динамо в сферической оболочке

Генерация магнитного поля в сферической оболочке описывается системой уравнений среднего поля [13] (см. также [14]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \alpha B + \widehat{L}A, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= -\Omega \frac{\partial}{\partial \theta} A + \widehat{L}B, \end{aligned} \quad (1)$$

где A и B — азимутальные компоненты вектора-потенциала \mathbf{A} и магнитного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\alpha(\theta)$ — α -эффект; $\Omega(\theta)$ — дифференциальное вращение, $\widehat{L} = \eta \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right)$ — оператор диффузии, η — коэффициент магнитной диффузии. Система (1) решается на интервале $0 \leq \theta \leq \pi$ с граничными условиями $B = 0$, $A = 0$ для $\theta = 0$ и π .

В теории динамо часто используют разложение магнитного поля на полоидальную и тороидальную составляющие. В нашем случае радиальная компонента магнитного поля $B_r = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A)$ определяет полоидальную составляющую, а азимутальная B — тороидальную.

Источниками энергии в (1) являются α - и Ω -эффекты. Первый ответствен за генерацию полоидальной компоненты магнитного поля из тороидальной за счет турбулентности. Второй эффект описывает генерацию тороидальной компоненты магнитного поля из полоидальной за счет дифференциального вращения жидкости.

Влияние магнитного поля на течение (нелинейность) задается алгебраическим α -квенчингом:

$$\alpha(\theta) = \frac{\alpha_o(\theta)}{1 + E_m}, \quad (2)$$

где $E_m(\theta) = (B_r^2 + B^2)/2$ — магнитная энергия.

2. Обратная задача

Решение прямой задачи (1), (2) с предписанными профилями $\alpha_o(\theta)$ и $\Omega(\theta)$ дает поле $\mathbf{B}(\theta, t)$, которое можно сравнить с наблюдениями. Одной из сложностей такого подхода является недостаток информации об $\alpha_o(\theta)$ и $\Omega(\theta)$. Так, в планетарном динамо эти профили известны лишь из трехмерных вычислений. Для солнечного динамо (см., например, [15]) информация о дифференциальном вращении Ω известна из гелиосейсмологии, в то время как профили α -эффекта варьируются от модели к модели. В галактическом динамо ситуация близка к солнечному динамо, что является причиной использования достаточно простых моделей среднего поля. Перечисленные выше причины мотивируют нахождение профилей $\alpha_o(\theta)$ - и $\Omega(\theta)$ -эффектов таких, что решение $\mathbf{B}(\theta, t)$ будет удовлетворять заданным свойствам, т. е. решение обратной задачи для системы (1), (2) (см. [12]).

Введем штрафную функцию $\Psi(\mathbf{B}, \mathbf{B}^o)$, где \mathbf{B} — модельное магнитное поле, а \mathbf{B}^o — наблюдаемое. Функция Ψ имеет хотя бы один минимум при $\mathbf{B} = \mathbf{B}^o$. Удачный выбор Ψ и в общем случае наблюдаемых производных от магнитного поля \mathbf{B}^o позволяет свести задачу к поиску глобального минимума. Однако на практике наблюдения не покрывают всю пространственную область генерации магнитного поля, т. е. задача оказывается недоопределенной. В то же время характеристики решения, которые используются при сопоставлении модельного решения и наблюдений, могут приводить к появлению большого числа решений, имеющих одно и то же Ψ , т. е. к неединственности решения. Это означает, что задача сводится к поиску наименьшего Ψ при наличии большого числа локальных минимумов, что в свою очередь налагает определенные ограничения на алгоритмы минимизации [16].

Следующий шаг состоит в том, чтобы рассмотреть только крупномасштабные $\alpha_o(\theta)$ и $\Omega(\theta)$, что соответствует первым N_α, N_Ω фурье-модам в разложении по θ :

$$\alpha_o = \sum_{n=1}^{N_\alpha} C_n^\alpha \sin(2\theta n), \quad \Omega = \sum_{n=0}^{N_\Omega} C_n^\Omega \cos(2\theta n). \quad (3)$$

Тогда задача минимизации сведется к поиску таких \mathbf{C}^α и \mathbf{C}^Ω , что $\Psi(\mathbf{C}^\alpha, \mathbf{C}^\Omega)$ имеет минимум (возможно, локальный). Это задача минимизации в пространстве размерности $d = N_\alpha + N_\Omega + 1$. Обратим внимание, что поиск минимума в нашем случае не является самоцелью. Другими словами, нас интересует не только глобальный минимум, который может

и не существовать, но и множество решений при малых Ψ . Анализ профилей $\alpha_o(\theta)$ и $\Omega(\theta)$ для таких решений позволяет по-другому взглянуть на модель и наблюдения. Это хороший способ научиться задавать вопросы модели и впоследствии эффективно ее использовать.

При решении прямой задачи (1), (2) использованы центральные разности 2-го порядка для аппроксимации пространственных производных и метод Рунге–Кутты 4-го порядка при интегрировании по времени. Код написан на языке C++ с использованием MPI для параллелизации вычислений, так что на отдельном процессоре решалась задача (1), (2) для определенного набора коэффициентов $(\mathbf{C}^\alpha, \mathbf{C}^\Omega)$, заданных случайным гауссовым генератором в определенном диапазоне. При задании случайных распределений для $(\mathbf{C}^\alpha, \mathbf{C}^\Omega)$ среднее значение для ускорения сходимости выбиралось равным предыдущему лучшему значению (т.е. соответствующему минимальному Ψ) для данного коэффициента. Дисперсия рассчитывалась из правила 3σ , чтобы иметь возможность покрыть весь интервал. Данный метод является адаптацией метода Монте-Карло [16] и оказывается малочувствителен к наличию локальных минимумов штрафной функции.

Для вычислений на кластере использовалась $N = 101$ пространственная точка по θ , шаг по времени $\tau = 10^{-5}$, число процессоров \mathcal{N} от 10 до 100. Обычно количество итераций было меньше 10. Интегрирование по времени проводилось на интервале $t = 20$. Для рассмотренной одномерной задачи использование кластера не являлось принципиальным, однако данный метод может быть легко обобщен на многомерную задачу, для которой необходимость использования параллельных компьютеров будет принципиальна.

Далее мы рассмотрим конкретные формы штрафной функции Ψ и обсудим смысл полученных профилей $\alpha_o(\theta)$ и $\Omega(\theta)$.

3. Результаты моделирования

Амплитуда источников энергии в (1) может быть выражена одним параметром: динамо-числом $\mathcal{D} = \frac{\|\alpha_o\| \|\Omega\| L^3}{\eta^2}$, где $L = \pi$ — пространственный масштаб, а $\|\cdot\|$ — норма. Рассмотрим, как решение системы (1), (2) с ограниченными $\|\alpha_o\| \leq Q_\alpha$ и $\|\Omega\| \leq Q_\omega$, где Q_α, Q_ω — константы, зависит от форм профилей α_o и Ω . Выбор конкретной формы нормы достаточно произволен. Учитывая, что α_o антисимметрична относительно экватора, используем следующее определение: $\|f\| = \pi^{-1} \int_0^\pi |f| \sin \theta d\theta$.

На существование асимметричного магнитного поля в (1), (2) было указано в работе [12], где проведен поиск решений с ненулевым потоком магнитного поля на экваторе. Прототипом такого решения являются динамо-волны на Солнце, проникающие через экватор. Полученные решения действительно

обладали экваториальной асимметрией магнитной энергии. Ниже мы рассмотрим штрафные функции, явно включающие наличие такой асимметрии.

Пусть отношение магнитных энергий в Северном (N) и Южном (S) полушариях равно η . Введем штрафную функцию $\Psi = 1 - e^{-\mathcal{R}}$, где $\mathcal{R} = \min(\eta, \eta^{-1})$. Минимум Ψ соответствует максимальному отношению энергий. Рассмотрим три случая, когда $\eta^P = \frac{E_m^{PN}}{E_m^{PS}}$ для полоидальной части (I), $\eta^T = \frac{E_m^{TN}}{E_m^{TS}}$ — для тороидальной (II) и $\eta = \frac{E_m^N}{E_m^S}$ (III) — для полной магнитной энергий $E_m = E_m^P + E_m^T$.

Результаты минимизации Ψ для (3) $N_\alpha = N_\Omega = M$, $M = 3$ и $Q = 50$ суммированы в таблице. Полученные решения действительно демонстрируют высокую степень экваториальной асимметрии в распределении магнитных энергий. В наибольшей степени это проявляется для случая II, где $\eta^T = 0.04$, т.е. в Южном полушарии магнитная энергия тороидальной компоненты магнитного поля в 25 раз больше, чем в Северном полушарии. Для полоидальной компоненты Ψ минимально для случая I (как и ожидалось по определению для Ψ). Полученные результаты не зависят существенно от длины фурье-рядов M .

Значения магнитных энергий и величин экваториальной асимметрии

n	N/S	E_m^P	E_m^T	E_m	η^P	η^T	η
I	N	3	298	301	0.33	1.60	1.54
	S	9	186	195			
II	N	6	1	7	0.99	0.04	0.22
	S	6	28	34			
III	N	6	25	31	1.60	15.8	5.85
	S	4	2	6			

Для объяснения появления экваториальной асимметрии рассмотрим полученные профили α_o и Ω более детально (рис. 1). Анализ может быть упрощен, если учесть тот факт, что для α_o и Ω , не зависящих от θ , решение линейной задачи (3) зависит лишь от произведения динамо-числа $\mathcal{D} = \alpha_o \cdot \Omega$. Поскольку некоторые черты линейного решения могут присутствовать и в нелинейном режиме, то мы также приведем произведение на рис. 1. Мы распространим обозначение \mathcal{D} и на случай, когда это уже не число, а функция θ .

Для случая I \mathcal{D} имеет экстремум в высоких широтах, так что области максимальной генерации в полушариях, соответствующие экстремумам \mathcal{D} , разнесены между собой на большое расстояние. Это способствует изоляции полушарий друг от друга и, как следствие, увеличению вероятности появления полей с разной морфологией.

Для случая II, где отношение тороидальных энергий максимально, \mathcal{D} имеет два локальных экстремума, один из которых очень близок к полюсу.

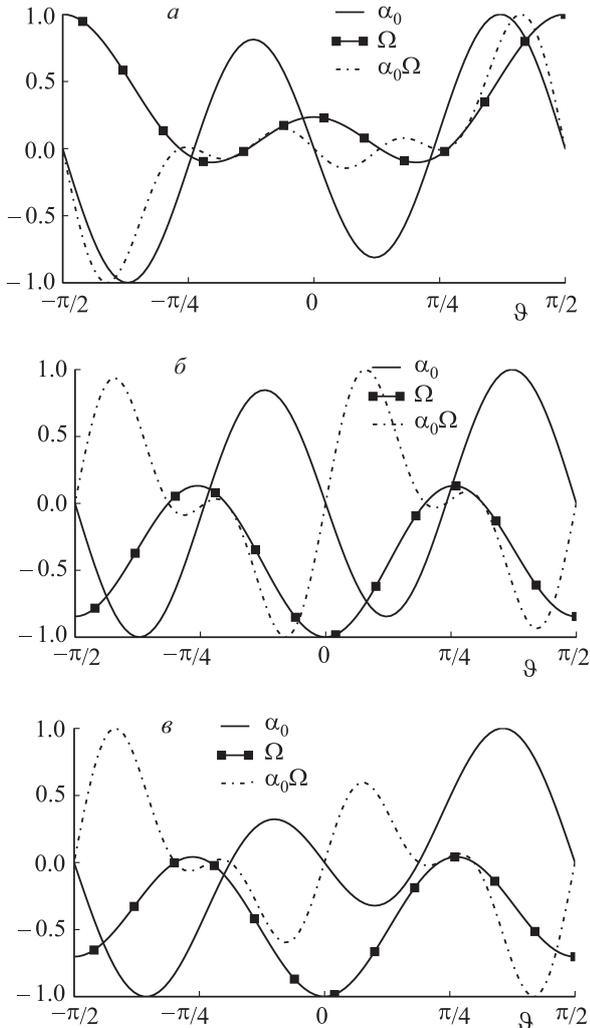


Рис. 1. Широтная зависимость α_0 , Ω и их произведения $\alpha_0\Omega$ для случаев I (140, 433, 40511) (а), II (136, 182, 13525) (б), и III (203, 180, 14618) (в). Числа соответствуют амплитудам α_0 , Ω и $\alpha_0\Omega$

Для случая III ситуация аналогична: экстремум около полюса более выражен. Проведенный дополнительно анализ решений, для которых асимметрия отсутствовала, также свидетельствует в пользу влияния расстояния между экстремумами максимальной генерации в полушариях: для этих режимов экстремумы были вблизи экватора. На самом экваторе $D=0$, поскольку α_0 меняет знак на экваторе.

В этой связи следует упомянуть работу [17], где при использовании линейного анализа была найдена область перехода от режима симметричного динамо к несимметричному, также соответствующего удаленным экстремумам максимальной генерации. Однако следует отметить, что анализ был проведен при условии, что в α_0 могут присутствовать симметричные относительно экватора фурье-моды, что противоречит физическим представлениям об этой величине.

Наряду с идеей об изоляции источников генерации в разных полушариях, популярно объяснение появления асимметрии за счет суперпозиции дипольной и квадрупольной мод. Для проверки этой

гипотезы мы провели разложение B_r - и B -компонент поля по полиномам Лежандра. Выбор сравнимых амплитуд приводит к следующему. Для случая I это моды (1, 2, 3) для полоидального поля и (1, 2) для тороидального. Здесь 1 — это диполь, 2 — квадруполь и т. д. Этот случай в целом укладывается в идею суперпозиции диполя и квадруполя, приводящих к асимметрии.

Для случаев II и III ситуация отлична: по крайней мере пять первых мод ответственны за асимметрию. Конечно же, наблюдаемая асимметрия является результатом суперпозиции четных и нечетных мод, но уже исходя из их большего количества. Чем больше их число, тем с большей точностью можно получить ступенчатое распределение поля со скачком на экваторе и тем больше будет степень экваториальной асимметрии. Очевидно, что этот сценарий осуществим при наличии корреляции между модами, которая может нарушаться при большом M в силу турбулентных эффектов.

До настоящего момента мы не обсуждали временное поведение полей. Для случаев I и III решение стационарно и периодически для случая II. Было бы соблазнительно сопоставить случай II с солнечным динамо, где асимметрия магнитной активности проявлялась во время минимума Маундера [5]. Однако этот сценарий не работает, поскольку динамо-волны направлены от экватора к полюсам (рис. 2), а не

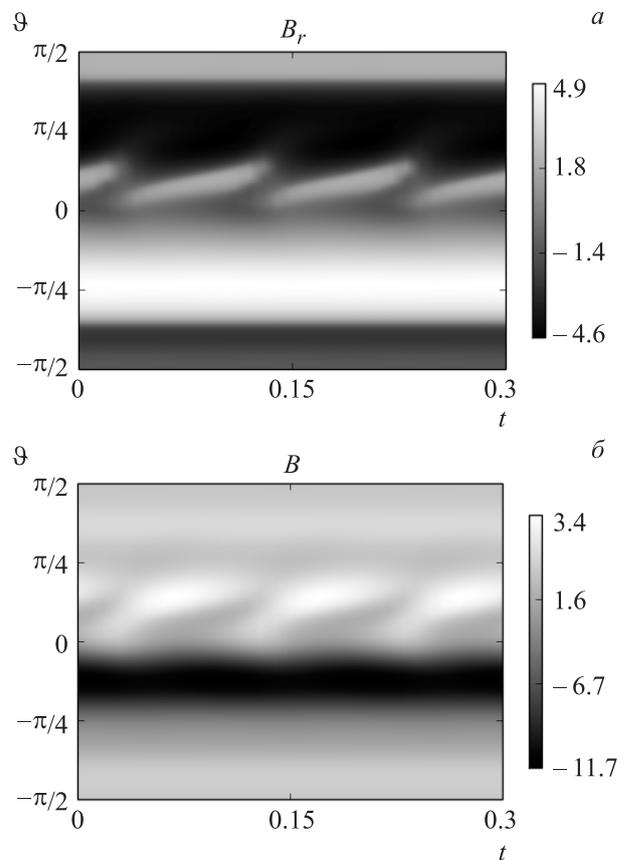


Рис. 2. Баттерфляй-диаграммы для B_r - и B -компонент, случай II

наоборот, как на Солнце. Это соответствует противоположному знаку \mathcal{D} . Эксперименты с другим знаком \mathcal{D} не позволяют получить асимметричное решение. Следует также отметить, что в полученных решениях осциллирующая компонента много меньше стационарной. В ходе численных экспериментов была также протестирована модель динамического α -квенчинга [18]. Нам удалось получить динамо-волну, идущую к экватору, однако уровень асимметрии был пренебрежимо мал.

Заключение

Обычно моделирование в динамо сводилось к решению прямой задачи с заданными параметрами. Однако даже одномерная модель Паркера с алгебраическим квенчингом оказывается настолько чувствительна к выбору параметров, что нет никакой гарантии, что полученный результат можно как-то сравнивать с наблюдениями. Более того, во многих случаях сами параметры подлежат определению. Эти доводы демонстрируют необходимость исследования всего конфигурационного пространства модели, что может быть затруднительно для более сложных систем, чем рассмотренная выше. В этой связи поиски оптимального решения и разработки соответствующих алгоритмов являются более перспективными. Рассмотренный выше метод решения обратной задачи может быть использован для этой цели. Что более важно, данный метод позволяет по-другому взглянуть на модель. Формулируя различные требования к решению, которые можно суммировать с разными весами, удается лучше понять свойства модели.

Возвращаясь к рассмотренному выше явлению экваториальной асимметрии, следует отметить, насколько полученные результаты соотносятся с результатами трехмерного моделирования, упомянутого во введении. Согласно работе [8] асимметрия магнитного поля слабо влияет на асимметрию течения, во всяком случае на уровне амплитуд кинетической энергии в полушариях. В рассмотренной выше модели подавление α -эффекта происходит за счет локального увеличения магнитной энергии. Другими словами, магнитная энергия антикоррелирует с амплитудой α -эффекта. Насколько это связано с изменением самих кинетических энергий в рамках рассмотренной модели среднего поля, сказать нельзя, и требуется рассмотрение более сложных моделей с учетом гидродинамики. Следует также учесть

тот факт, что в теории динамо часто встречаются бессильные режимы, когда магнитная энергия поля велика, а направление электрического тока близко по направлению к магнитному полю. В этом случае возникающая сила Лоренца, оказывающая обратное воздействие на течение, будет мала и магнитное поле может накопить большую энергию. Такая ситуация реализуется в геодинамо. Очевидно, что для таких систем механизм квенчинга, подавления источников генерации магнитного поля должен быть модифицирован.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ) (грант № 16-17-10097).

Список литературы

1. Ruzmaikin A.A., Shukurov A.M., Sokoloff D.D. *Magnetic Fields in Galaxies*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
2. Rüdiger G., Kitchatinov L.L., Hollerbach R. *Magnetic processes in astrophysics. Theory, simulations, experiments*. Wiley-VCHr, 2013.
3. Gubbins D., Barber C.N., Gibbons S., Love J.J. // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 2000. **456**. P. 1669.
4. Knaack R., Stenflo J.O., Berdyugina S.V. // *Astron. Astrophys.* 2004. **418**. P. L17.
5. Ribes J.C., Nesme-Ribes E. // *Astron. Astrophys.* 1993. **276**. P. 549.
6. Stanley S., Elkins-Tanton L., Zuber M.T., Parmentier E.M. // *Science*. 2008. **321**. P. 1822.
7. Grote E., Busse F.H. // *Phys. Rev. E*. 2000. **62**. P. 4457.
8. Busse F.H., Simitev R.D. // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* 2006. **100**. P. 341.
9. Landeau M., Aubert J. // *Phys. Earth. Planet. Int.* 2011. **185**. P. 61.
10. Amit H., Christensen U.R., Langlais B. // *Phys. Earth Planet. Int.* 2011. **189**. P. 63.
11. Dietrich W., Wicht J. // *Phys. Earth Planet. Int.* 2013. **217**. P. 10.
12. Reshetnyak M.Yu. // *Russ. J. Earth Sci.* 2015. **15**. P. ES4001.
13. Parker E.N. // *Astrophys. J.* 1955. **122**. P. 293.
14. Stix M. *The Sun: An Introduction*. Springer, 1989.
15. Belvedere G., Kuzanyan K., Sokoloff D.D. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2000. **315**. P. 778.
16. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing (C++ Code)*. 3rd ed. Cambridge University Press, 2007.
17. Gallet B., Pétrélis F. // *Phys. Rev.* 2009. **E80**. P. 035302.
18. Kleeorin N., Rogachevskii I., Ruzmaikin A. // *Astron. Astrophys.* 1995. **297**. P. 159.

The equatorial asymmetry of a magnetic field

M. Yu. Reshetnyak^{1,2}

Institute of the Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences. Moscow 123995, Russia.

Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere, and Radio Wave Propagation, Russian Academy of Sciences. Moscow 142190, Russia

E-mail: m.reshetnyak@gmail.com.

Solution of the inverse problem for Parker's one-dimensional mean-field dynamo model in a thin spherical layer is considered. The method allows the spatial distribution of energy sources, the α - and Ω -effects,

to be found provided specified constraints occur on the solution. The highest ratio of the magnetic energies for the Northern and Southern hemispheres is discussed as such a constraint. The method is a modification of the Monte Carlo technique; it is convenient for parallel computations and based on minimization of the cost function that characterizes the deviation of the model solution properties from the desired ones. The calculations show that the ratio of the energies in the hemispheres may exceed an order of magnitude for both poloidal and toroidal components of the magnetic energy. The ratio depends on the distance of the effective zone of the generation of the magnetic field from the equator and the number of harmonics in the spectrum. The greater this distance is and the higher the number of harmonics is, the stronger the magnetic field asymmetry can be.

Keywords: Parker's model, inverse problem, dynamo theory.

PACS: 47.65.Md.

Received 10 May 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **72**, No. 4. Pp. 396–401.

Сведения об авторе

Решетняк Максим Юрьевич — доктор физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, гл. науч. сотрудник; e-mail: m.reshetnya@gmail.com.