ФИЗИКА ЗЕМЛИ, АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ

Влияние релятивистского закона преобразования углов на результаты лазерной локации ИСЗ, находящихся на круговых орбитах и оснащенных единичными ретрорефлекторами

И. В. Мазаева[1,a], М. А. Пасисниченко[2,b]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики атмосферы. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[2] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), кафедра прикладной математики, информационных технологий и электротехники. Россия, 125993, Волоколамское ш., д. 4.*
E-mail: [a] *ingamazaeva@yandex.ru,* [b] *kaf.pmitet.mai@yandex.ru*

Статья поступила 07.05.2016, подписана в печать 23.11.2016.

Показано, что в силу релятивистского закона преобразования углов отраженный от движущегося ретрорефлектора лазерный импульс распространяется не строго обратно, а под малым углом к направлению на лазерную станцию. Поэтому в приемный телескоп лазерной станции попадает не центральный луч этого импульса, а луч, находящийся на его периферии. В результате поток электромагнитной энергии, принимаемый лазерной станцией, заведомо меньше потока энергии в окрестности центрального луча. На основе численного анализа проведена оценка коэффициента ослабления потока энергии. Показано, что если приемный телескоп отделить от лазерной станции, сделать его подвижным и передвигать по поверхности Земли так, чтобы центр каждого пятна, образуемого отраженными световыми импульсами, попадал в этот телескоп, то принимаемый им поток электромагнитной энергии при лазерной локации ИСЗ увеличится более чем в 100 раз по сравнению с потоком энергии, принимаемым стационарным телескопом лазерной станции. Из проведенного исследования следует, что максимальная скорость движения по поверхности Земли центров пятен отраженных от ретрорефлектора ИСЗ световых импульсов не превышает 8 км/ч.

Ключевые слова: релятивистский закон преобразования углов, лазерная локация, уравнение луча, ретрорефлектор.

УДК: 528.06:528.83. PACS: 04.20.–q, 42.60.Jf.

Введение

Согласно специальной теории относительности законы отражения от движущегося зеркала [1] отличаются от аналогичных законов при использовании покоящегося зеркала. Это внешне безобидное обстоятельство проявляется самым отрицательным образом при лазерной локации искусственных спутников Земли (ИСЗ). В качестве отражателей, установленных на внешних панелях ИСЗ, в этом случае применяются ретрорефлекторы — уголковые отражатели, которые в системе покоя обладают свойством отражать световой импульс строго в том направлении, откуда он на них приходит. И если бы не указанный выше эффект теории относительности, то центр светового импульса, испущенного из телескопа лазерной станции в сторону ИСЗ, после отражения от ретрорефлектора возвращался бы прямо в тот же телескоп.

Однако по околоземным орбитам ИСЗ движутся в гравитационном поле Земли с заметными скоростями $V_S \sim 5$ км/с. Поэтому согласно общей теории относительности координаты и время системы отсчета, помещенной в центр ИСЗ, связаны с координатами и временем земного наблюдателя более сложными соотношениями по сравнению с преобразованиями Лоренца (подробнее см. [2]). В результате световой импульс отражается от ретрорефлектора под некоторым углом к направлению, по которому он пришел. Проведенный в работе [3] расчет показал, что в геоцентрической невращающейся системе отсчета вектор скорости отраженного светового импульса $\boldsymbol{V}_{\text{ref}}$ равен

$$\boldsymbol{V}_{\text{ref}} = 2\boldsymbol{V}_S - \boldsymbol{V}_{\text{ph}} - 2(\boldsymbol{V}_{\text{ph}}\boldsymbol{V}_S)\boldsymbol{V}_{\text{ph}}/c^2 + O\left(V_S^2/c^2\right)\boldsymbol{V}_{\text{ph}}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{V}_S$ — вектор скорости ИСЗ, а $\boldsymbol{V}_{\text{ph}}$ — вектор скорости импульса, испущенного лазерной станцией.

В отличие от обычного зеркала, у движущегося ретрорефлектора из-за его конструкции наибольшее значение угла между падающим и отраженным лучами получается в том случае, когда он движется перпендикулярно к падающему лучу.

В результате этого релятивистского эффекта центр отраженного светового импульса оказывается на некотором расстоянии от лазерной станции, причем приемный телескоп лазерной станции в лучшем случае находится на периферии этого импульса. Так как поток энергии электромагнитного излучения в импульсе убывает по мере удаления от оси импульса к его периферии, то на приемный телескоп из-за этого попадает лишь незначительная часть световой энергии [4]. В частности, при использовании единичного ретрорефлектора распределение потока энергии отраженного светового импульса по его поперечному сечению вблизи земной поверхности [5] описывается формулой

$$\sigma(\eta) = \sigma_0 \left(\frac{2J_1(\eta)}{\eta} \right)^2, \qquad (2)$$

где $J_1(\eta)$ — функция Бесселя первого порядка, $\eta = \pi D \sin \alpha / \lambda$, α — угол между исследуемым лучом и центральным лучом отраженного пучка лучей, λ — длина волны лазерного излучения, D — диаметр выходной апертуры отражателя.

Из формулы (2) следует, что поток световой энергии, принимаемый лазерной станцией (при $\eta \neq 0$), заведомо меньше (рис. 1) потока энергии в центре пятна (при $\eta = 0$). Следует отметить также, что при проведении лазерной локации центры пятен отраженных световых импульсов не находятся в покое, а движутся по поверхности Земли.

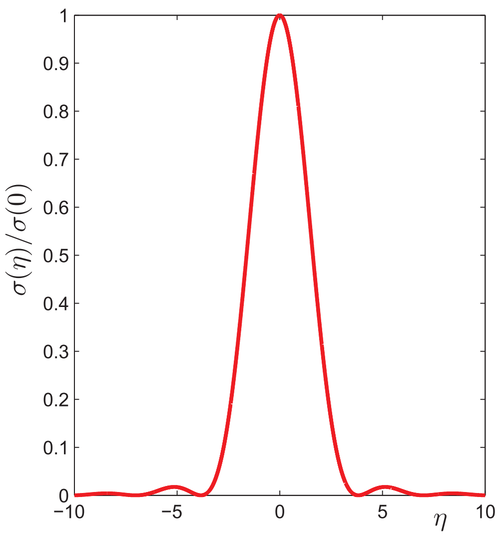

Рис. 1. Зависимость величины принимаемого потока отраженного лазерного импульса от величины параметра η

Целью настоящей работы является исследование, насколько увеличится поток энергии принимаемых световых импульсов, если приемный телескоп отделить от лазерной станции и передвигать его по поверхности Земли вслед за центрами отраженных световых импульсов.

1. Движение светового импульса из лазерной станции

Рассмотрим лазерную станцию, расположенную на поверхности Земли в точке со сферическими координатами R_0, θ_0 и φ_0. Предположим, что эта станция испустила лазерный импульс в направлении ИСЗ, находящегося на круговой околоземной орбите радиуса R_S и оснащенного единичным ретрорефлектором. Лазерный импульс в некоторый момент времени отражается от ретрорефлектора этого ИСЗ, после чего возвращается на Землю и образует на ее поверхности пятно некоторого радиуса r_0.

Вычислим, во сколько раз величина потока энергии, принимаемая подвижным телескопом, больше величины потока энергии, принимаемой неподвижным телескопом лазерной станции. Такие расчеты как в линейной [1], так и в нелинейной электродинамике [6] обычно проводят прямым решением уравнений поля. Однако, учитывая, что при лазерной локации используемое электромагнитное излучение имеет длину волны ($\lambda = 532$ нм), которая значительно меньше высоты орбиты ИСЗ (> 300 км), можно воспользоваться эйкональным приближением.

Расчеты в основном будем проводить в топоцентрической системе отсчета, начало которой совмещено с лазерной станцией, ось OZ направлена по местной вертикали, ось OX — по касательной к меридиану, а ось OY — по касательной к параллели.

Эта система отсчета вращается вместе с Землей относительно далеких звезд и поэтому является неинерциальной системой отсчета. Согласно Эйнштейну [7] поля инерции неинерциальных систем отсчета являются гравитационными полями частного вида. Поэтому для описания движения испущенных и отраженных лазерных импульсов в топоцентрической системе отсчета необходимо использовать уравнения общей теории относительности.

Запишем общековариантные (т. е. имеющие одинаковый четырехмерный тензорный вид в любых системах отсчета и при наличии гравитационного поля) уравнения Максвелла [8]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \sqrt{-g} g^{nm} g^{kl} F_{ml} \right\} = -\frac{4\pi}{c} j^n,$$
$$\frac{\partial F_{nm}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{mk}}{\partial x^n} + \frac{\partial F_{kn}}{\partial x^m} = 0,$$

где g — определитель метрического тензора g_{ik} псевдориманова пространства-времени, F_{nm} — тензор электромагнитного поля.

Из этой системы уравнений общеизвестным методом [9] можно получить уравнение эйконала

$$g^{nk} \frac{\partial S}{\partial x^n} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 0. \qquad (3)$$

Используя метод Лагранжа–Шарпи [10], уравнение эйконала (3) сведем к уравнению для изотропной геодезической:

$$\frac{dk^i}{d\sigma} + \Gamma^i_{nm} k^n k^m = 0, \quad g_{nm} k^n k^m = 0, \qquad (4)$$

где k^n — касательный четырехвектор к геодезической, σ — произвольный аффинный параметр, Γ^i_{nm} — символы Кристоффеля.

Уравнения (4) единообразно описывают траекторию движения импульса электромагнитного излучения (луч) и закон его движения по лучу в любом псевдоримановом пространстве-времени [11, 12].

Так как гравитационное поле Земли вносит [13] несущественный вклад в искривление лучей

($\sim 10^{-3}$ угловой секунды), что значительно меньше вклада от поля сил инерции [14, 15], то влиянием гравитационного поля Земли в дальнейшем будем пренебрегать. Поэтому метрический тензор в топоцентрической системе отсчета, где расположена лазерная станция, принимает вид [16, 17]

$$\begin{aligned} &g_{00} = 1 - K^2\{[x\cos\theta_0 + (z+R_0)\sin\theta_0]^2 + y^2\},\\ &g_{01} = Ky\cos\theta_0,\\ &g_{02} = -K[x\cos\theta_0 + (z+R_0)\sin\theta_0],\\ &g_{03} = Ky\sin\theta_0,\\ &g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \end{aligned} \tag{5}$$

где $K = \Omega/c$, Ω — частота вращения Земли.

Подставляя выражения (5) в уравнения (4) и переходя, как и в работе [18], от дифференцирования по аффинному параметру σ к дифференцированию по переменной $x^0 = ct$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - 2K\dot{y}\cos\theta_0 - K^2[x\cos\theta_0 + (z+R_0)\sin\theta_0]\cos\theta_0 = 0,\\ &\ddot{y} + 2K[\dot{x}\cos\theta_0 + \dot{z}\sin\theta_0] - K^2 y = 0,\\ &\ddot{z} - 2K\dot{y}\sin\theta_0 - K^2[x\cos\theta_0 + (z+R_0)\sin\theta_0]\sin\theta_0 = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где точкой обозначена производная по $x^0 = ct$.

У системы уравнений (6) имеется первый интеграл:

$$\begin{aligned} &\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + K^2\{[x\cos\theta_0 + (z+R_0)\sin\theta_0]^2 + y^2\} -\\ &\quad - 2K\{\dot{x}y\cos\theta_0 - \dot{y}[x\cos\theta_0 + (z+R_0)\sin\theta_0] +\\ &\quad + \dot{z}y\sin\theta_0\} = 1. \end{aligned} \tag{7}$$

В топоцентрической системе отсчета координаты x_S, y_S, z_S рассматриваемого ИСЗ имеют вид [19]

$$\begin{aligned} x_S(t) &= R_S\{[\cos(\omega t + \psi_0)\cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) +\\ &\quad + \cos\theta\sin(\omega t + \psi_0)\sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi)]\cos\theta_0 -\\ &\quad - \sin\theta\sin\theta_0\sin(\omega t + \psi_0)\},\\ y_S(t) &= R_S\{\cos\theta\sin(\omega t + \psi_0)\cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) -\\ &\quad - \cos(\omega t + \psi_0)\sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi)\},\\ z_S(t) &= R_S\{\sin\theta\cos\theta_0\sin(\omega t + \psi_0) +\\ &\quad + [\cos(\omega t + \psi_0)\cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) +\\ &\quad + \cos\theta\sin(\omega t + \psi_0)\sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi)]\sin\theta_0\} - R_0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\omega = \sqrt{GM/R_S^3}$ — угловая частота обращения ИСЗ по круговой орбите, GM — произведение гравитационной постоянной на массу Земли, θ — наклонение орбиты, φ — долгота восходящего узла, ψ_0 — угловое расстояние ИСЗ в момент времени $t = 0$ от узла.

Для уменьшения погрешностей, вносимых неоднородностью атмосферы, рабочими при лазерной локации считаются участки небесной сферы, расположенные на 20° выше местного горизонта. Это условие в топоцентрической системе отсчета принимает вид

$$z_S(t) > \sqrt{x_S(t)^2 + y_S(t)^2 + z_S(t)^2}\cos 70^\circ. \tag{9}$$

Поэтому все расчеты необходимо проводить только при нахождении ИСЗ в области пространства, удовлетворяющей условию (9).

2. Движение светового импульса из лазерной станции

Предположим, что ИСЗ появляется в области локации (9) в некоторый момент времени t_b. Тогда момент времени, в который лазерная станция испустит N-й световой импульс, будет определяться соотношением $t_N = t_b + N\Delta T$, где ΔT — промежуток времени между излучением двух последовательных импульсов.

Построим уравнение луча, по которому этот световой импульс будет распространяться из лазерной станции к ретрорефлектору ИСЗ. Для этого представим решение уравнений (6) в виде пучка лучей, выходящих в момент времени $t = t_N$ из лазерной станции (из точки $x = y = z = 0$ топоцентрической системы отсчета):

$$\begin{aligned} x_L(t) &= R_0\sin\theta_0\cos\theta_0[\cos\Omega(t - t_N) - 1] +\\ &\quad + c(t - t_N)\{[n_x\cos[\Omega(t - t_N) + \varphi_0] +\\ &\quad + n_y\sin[\Omega(t - t_N) + \varphi_0]]\cos\theta_0 - n_z\sin\theta_0\},\\ y_L(t) &= -R_0\sin\theta_0\sin\Omega(t - t_N) -\\ &\quad - c(t - t_N)[n_x\sin[\Omega(t - t_N) + \varphi_0] -\\ &\quad - n_y\cos[\Omega(t - t_N) + \varphi_0]],\\ z_L(t) &= R_0\sin^2\theta_0[\cos\Omega(t - t_N) - 1] +\\ &\quad + c(t - t_N)\{[n_x\cos[\Omega(t - t_N) + \varphi_0] +\\ &\quad + n_y\sin[\Omega(t - t_N) + \varphi_0]]\sin\theta_0 + n_z\cos\theta_0\}, \end{aligned} \tag{10}$$

где n_x, n_y, n_z — постоянные интегрирования, определяющие ориентацию луча в пространстве.

Подставляя выражения (10) в первый интеграл (7), получим условие, которому они должны удовлетворять:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \tag{11}$$

Выберем из пучка лучей (10) луч, который при $t = t_r$ проходит через точку пространства, в которой в этот момент времени находится ИСЗ. Для обеспечения этого требования константы интегрирования n_x, n_y, n_z и время t_r необходимо определить из уравнений

$$x_L(t_r) = x_S(t_r),\quad y_L(t_r) = y_S(t_r),\quad z_L(t_r) = z_S(t_r).$$

Разрешим эти уравнения относительно n_x, n_y и n_z:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{1}{c(t_r - t_N)}\{R_S[\cos(\Omega t_N - \varphi)\cos(\omega t_r + \psi_0) +\\ &\quad + \sin(\Omega t_N - \varphi)\sin(\omega t_r + \psi_0)\cos\theta] - R_0\sin\theta_0\cos\varphi_0\},\\ n_y &= \frac{1}{c(t_r - t_N)}\{R_S[\cos(\Omega t_N - \varphi)\sin(\omega t_r + \psi_0)\cos\theta -\\ &\quad - \sin(\Omega t_N - \varphi)\cos(\omega t_r + \psi_0)] - R_0\sin\theta_0\sin\varphi_0\},\\ n_z &= \frac{R_S\sin\theta\sin(\omega t_r + \psi_0) - R_0\cos\theta_0}{c(t_r - t_N)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя выражения (12) в равенство (11), придем к уравнению для определения момента времени t_r :

$$c^2(t_r-t_N)^2 = \\ = R_S^2 - 2R_0R_S\{\sin\theta_0[\cos(\omega t_r+\psi_0)\cos(\Omega t_N+\varphi_0-\varphi)+ \\ +\cos\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\sin(\Omega t_N+\varphi_0-\varphi)]+ \\ +\cos\theta_0\sin\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\}+R_0^2.$$

При обмене лазерными импульсами с ИСЗ, находящимся на орбите, радиус которой меньше расстояния от Земли до Луны, справедлива оценка $\omega(t_r-t_N)\sim 10^{-5}$. Поэтому для всех ИСЗ это уравнение можно разложить в ряд по этому малому параметру. Ограничиваясь относительной точностью $\sim 10^{-7}$, получим следующее уравнение:

$$c^2(t_r-t_N)^2 - L^2 - 2c(t_r-t_N)\frac{\omega}{c}R_SR_0\times \\ \times\{\sin\theta_0[\sin(\omega t_N+\psi_0)\cos(\Omega t_N+\varphi_0-\varphi)- \\ -\cos\theta\cos(\omega t_N+\psi_0)\sin(\Omega t_N+\varphi_0-\varphi)]- \\ -\cos\theta_0\sin\theta\cos(\omega t_N+\psi_0)\}=0,$$

где введено обозначение

$$L^2 = R_S^2+R_0^2-2R_SR_0\times \\ \times\{\sin\theta_0[\cos(\omega t_N+\psi_0)\cos(\Omega t_N+\varphi_0-\varphi)+ \\ +\cos\theta\sin(\omega t_N+\psi_0)\sin(\Omega t_N+\varphi_0-\varphi)]+ \\ +\cos\theta_0\sin\theta\sin(\omega t_N+\psi_0)\}.$$

Решая это уравнение относительно t_r, можно найти момент отражения от ретрорефлектора светового импульса, который был испущен лазерной станцией в момент времени t_N:

$$t_r = t_r(t_N) = t_N + \frac{L}{c} + \frac{\omega}{c^2}R_0R_S\times \\ \times\{[\sin(\omega t_N+\psi_0)\cos(\Omega t_N+\varphi_0-\varphi)- \\ -\cos\theta\cos(\omega t_N+\psi_0)\sin(\Omega t_N+\varphi_0-\varphi)]\sin\theta_0- \\ -\cos\theta_0\sin\theta\cos(\omega t_N+\psi_0)\}. \quad (13)$$

Таким образом, в топоцентрической системе отсчета выражения (10), (12) и (13) описывают движение светового импульса по лучу от лазерной станции к ИСЗ, находящемуся на круговой орбите.

3. Отражение лазерного импульса от движущегося ретрорефлектора

Вычислим все входящие в выражение (1) векторы. Формулы преобразования координат x, y, z топоцентрической системы отсчета к координатам x^{Geo}, y^{Geo}, z^{Geo} невращающейся геоцентрической системы отсчета имеют достаточно сложный вид [2, 19]. Отбрасывая в них несущественные для нашей задачи слагаемые, получим

$$x^{\mathrm{Geo}} = [x\cos\theta_0+(z+R_0)\sin\theta_0]\cos(\Omega t+\varphi_0)- \\ -y\sin(\Omega t+\varphi_0),$$
$$y^{\mathrm{Geo}} = [x\cos\theta_0+(z+R_0)\sin\theta_0]\sin(\Omega t+\varphi_0)+ \\ +y\cos(\Omega t+\varphi_0),$$
$$z^{\mathrm{Geo}} = -x\sin\theta_0+(z+R_0)\cos\theta_0$$

и, используя выражения (8), найдем закон движения ИСЗ по круговой орбите в невращающейся геоцентрической системе отсчета:

$$x_S^{\mathrm{Geo}}(t) = R_S[\cos\varphi\cos(\omega t+\psi_0)- \\ -\sin\varphi\cos\theta\sin(\omega t+\psi_0)],$$
$$y_S^{\mathrm{Geo}}(t) = R_S[\sin\varphi\cos(\omega t+\psi_0)+ \\ +\cos\varphi\cos\theta\sin(\omega t+\psi_0)],$$
$$z_S^{\mathrm{Geo}}(t) = R_S\sin\theta\sin(\omega t+\psi_0).$$

После дифференцирования этих выражений по времени и подстановки $t=t_r$ получим компоненты вектора скорости ИСЗ $\boldsymbol{V}_r$ в этой системе отсчета:

$$V_r^x(t_r) = -\omega R_S[\cos\varphi\sin(\omega t_r+\psi_0)+ \\ +\sin\varphi\cos\theta\cos(\omega t_r+\psi_0)],$$
$$V_r^y(t_r) = \omega R_S[\cos\varphi\cos\theta\cos(\omega t_r+\psi_0)- \\ -\sin\varphi\sin(\omega t_r+\psi_0)], \quad (14)$$
$$V_r^z(t_r) = \omega R_S\sin\theta\cos(\omega t_r+\psi_0).$$

Совершенно аналогично найдем уравнение луча (10) в невращающейся геоцентрической системе отсчета (при $t_N \leqslant t \leqslant t_r$):

$$x_L^{\mathrm{Geo}}(t) = R_0\sin\theta_0\cos(\Omega t_N+\varphi_0)+c(t-t_N)M_x,$$
$$y_L^{\mathrm{Geo}}(t) = R_0\sin\theta_0\sin(\Omega t_N+\varphi_0)+c(t-t_N)M_y,$$
$$z_L^{\mathrm{Geo}}(t) = R_0\cos\theta_0+c(t-t_N)M_z,$$

где компоненты вектора $\boldsymbol{M}$, входящие в эти формулы, имеют вид

$$M_x = \frac{1}{c(t_r-t_N)}\{R_S[\cos\varphi\cos(\omega t_r+\psi_0)- \\ -\sin\varphi\cos\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)]- \\ -R_0\sin\theta_0\cos(\Omega t_N+\varphi_0)\},$$
$$M_y = \frac{1}{c(t_r-t_N)}\{R_S[\sin\varphi\cos(\omega t_r+\psi_0)+ \\ +\cos\varphi\cos\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)]- \\ -R_0\sin\theta_0\sin(\Omega t_N+\varphi_0)\},$$
$$M_z = \frac{1}{c(t_r-t_N)}\{R_S\sin\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)-R_0\cos\theta_0\}.$$

Вычислим теперь вектор скорости центра лазерного импульса $\boldsymbol{V}_{\mathrm{ph}}$ в этой системе отсчета в момент времени $t=t_r$:

$$V_{\mathrm{ph}}^x(t_r) = \frac{dx_L^{\mathrm{Geo}}(t)}{dt}\Big|_{t=t_r} = cM_x,$$
$$V_{\mathrm{ph}}^y(t_r) = \frac{dy_L^{\mathrm{Geo}}(t)}{dt}\Big|_{t=t_r} = cM_y, \quad (15)$$
$$V_{\mathrm{ph}}^z(t_r) = \frac{dz_L^{\mathrm{Geo}}(t)}{dt}\Big|_{t=t_r} = cM_z.$$

Компоненты вектора скорости отраженного лазерного импульса $\boldsymbol{V}_{\mathrm{ref}}$ в невращающейся геоцентрической системе отсчета могут быть получены, если выражения (14), (15) подставить в формулу (1).

4. Вычисление угла между центральным лучом и лучом, соединяющим ретрорефлектор с лазерной станцией

От ретрорефлектора отраженный световой импульс распространяется в виде расходящегося пучка лучей, один из которых соединяет ИСЗ и лазерную станцию. Этот луч составляет некоторый угол α с центральным лучом отраженного импульса. Найдем синус этого угла. Для этого построим сначала в невращающейся геоцентрической системе отсчета уравнение луча, соединяющего ретрорефлектор при $t \geqslant t_r$ с лазерной станцией. Решая уравнения (6) с начальным условием $x_L^{\text{Geo}}(t_r) = x_S^{\text{Geo}}(t_r)$, $y_L^{\text{Geo}}(t_r) = y_S^{\text{Geo}}(t_r)$, $z_L^{\text{Geo}}(t_r) = z_S^{\text{Geo}}(t_r)$, запишем уравнение пучка лучей отраженного светового импульса, исходящих из этой точки:

$$\begin{aligned} x_{\text{ref}}^{\text{Geo}}(t) &= x_S^{\text{Geo}}(t_r) + L_x c(t-t_r), \\ y_{\text{ref}}^{\text{Geo}}(t) &= y_S^{\text{Geo}}(t_r) + L_y c(t-t_r), \\ z_{\text{ref}}^{\text{Geo}}(t) &= z_S^{\text{Geo}}(t_r) + L_z c(t-t_r), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\boldsymbol{L}$ — некоторый постоянный вектор, который в силу уравнения (7) должен быть единичным:

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 1. \tag{17}$$

Координаты лазерной станции в невращающейся геоцентрической системе отсчета являются следующими функциями времени:

$$\begin{aligned} x_{\text{las}}^{\text{Geo}}(t) &= R_0 \sin\theta_0 \cos(\Omega t + \psi_0), \\ y_{\text{las}}^{\text{Geo}}(t) &= R_0 \sin\theta_0 \sin(\Omega t + \psi_0), \\ z_{\text{las}}^{\text{Geo}}(t) &= R_0 \cos\theta_0. \end{aligned}$$

Выберем из пучка лучей луч, соединяющий ретрорефлектор и лазерную станцию. Для этого потребуем, чтобы в некоторый момент времени t^* этот луч проходил через лазерную станцию:

$$\begin{aligned} x_{\text{ref}}^{\text{Geo}}(t^*) &= x_{\text{las}}^{\text{Geo}}(t^*), \\ y_{\text{ref}}^{\text{Geo}}(t^*) &= y_{\text{las}}^{\text{Geo}}(t^*), \\ z_{\text{ref}}^{\text{Geo}}(t^*) &= z_{\text{las}}^{\text{Geo}}(t^*). \end{aligned}$$

Отсюда найдем компоненты вектора $\boldsymbol{L}$:

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{1}{c(t^*-t_r)}\big\{R_0\cos(\Omega t^* + \varphi_0)\sin\theta_0 - \\ &- R_S\big[\cos(\omega t_r + \psi_0)\cos\varphi - \cos\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\sin\varphi\big]\big\}, \\ L_y &= \frac{1}{c(t^*-t_r)}\big\{R_0\sin(\Omega t^* + \varphi_0)\sin\theta_0 - \\ &- R_S\big[\cos(\omega t_r + \psi_0)\sin\varphi + \cos\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\cos\varphi\big]\big\}, \\ L_z &= \frac{R_0\cos\theta_0 - R_S\sin\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)}{c(t^*-t_r)}. \end{aligned}$$

Тогда из условия (17) получим трансцендентное уравнение для определения момента времени t^*

$$\begin{aligned} c^2\big(t^*-t_r\big)^2 &= R_S^2 + R_0^2 - 2R_0R_S \times \\ &\times \big\{\sin\theta_0\big[\cos(\omega t_r+\psi_0)\cos\big(\Omega t^* + \varphi_0 - \varphi\big) + \\ &+ \cos\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\sin\big(\Omega t^* + \varphi_0 - \varphi\big)\big] + \\ &+ \cos\theta_0\sin\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\big\}. \end{aligned}$$

Разлагая это уравнение в ряд по малому параметру $\Omega(t^*-t_r) \sim 10^{-5}$ с квадратичной точностью, получим

$$\begin{aligned} &c^2\big(t^*-t_r\big)^2 - 2c\big(t^*-t_r\big)\frac{\Omega}{c}R_SR_0 \times \\ &\times \sin\theta_0\big\{\cos(\omega t_r+\psi_0)\sin(\Omega t_r + \varphi_0 - \varphi) - \\ &- \cos\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\cos(\Omega t_r+\varphi_0-\varphi)\big\} - R_{0r}^2 = 0, \end{aligned}$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$\begin{aligned} R_{0r} &= R_S^2 + R_0^2 - 2R_SR_0 \times \\ &\times \big\{\sin\theta_0\big[\cos(\omega t_r+\psi_0)\cos(\Omega t_r + \varphi_0 - \varphi) + \\ &+ \cos\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\sin(\Omega t_r+\varphi_0-\varphi)\big] + \\ &+ \cos\theta_0\sin\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\big\} \end{aligned}$$

для квадрата расстояния от лазерной станции до точки, в которой космический аппарат находился в момент времени $t = t_r$. Его решение с требуемой точностью имеет вид

$$\begin{aligned} c\big(t^*-t_r\big) &= R_{0r} + \frac{\Omega}{c}R_0R_S\sin\theta_0 \times \\ &\times \big[\cos(\omega t_r+\psi_0)\sin(\Omega t_r+\varphi_0-\varphi) - \\ &- \cos\theta\sin(\omega t_r+\psi_0)\cos(\Omega t_r+\varphi_0-\varphi)\big]. \end{aligned}$$

В невращающейся геоцентрической системе отсчета свет распространяется прямолинейно, поэтому центральный луч отраженного лазерного импульса будет направлен вдоль вектора скорости $\boldsymbol{V}_{\text{ref}}$, начинаясь при $t = t_r$ в точке $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_S^{\text{Geo}}(t_r)$. Тогда закон движения центра отраженного светового импульса в этой системе отсчета имеет вид

$$\begin{aligned} x_{\text{ref}}^{\text{Geo}}(t) &= x_S^{\text{Geo}}(t_r) + V_{\text{ref}}^x(t_r)(t-t_r), \\ y_{\text{ref}}^{\text{Geo}}(t) &= y_S^{\text{Geo}}(t_r) + V_{\text{ref}}^y(t_r)(t-t_r), \\ z_{\text{ref}}^{\text{Geo}}(t) &= z_S^{\text{Geo}}(t_r) + V_{\text{ref}}^z(t_r)(t-t_r). \end{aligned} \tag{18}$$

Найдем теперь угол α между центральным лучом отраженного светового импульса и лучом, соединяющим ретрорефлектор с лазерной станцией. Этот угол совпадает [20] с углом между касательными к указанным выше лучам в точке $\big\{x_S^{\text{Geo}}(t_r),\ y_S^{\text{Geo}}(t_r),\ z_S^{\text{Geo}}(t_r)\big\}$, где находится ретрорефлектор в момент отражения светового импульса. Как следует из выражений (16) и (18), касательный вектор к лучу, соединяющему ретрорефлектор с лазерной станцией, совпадает с вектором $\boldsymbol{L}$, а к центральному лучу — с вектором $\boldsymbol{V}_{\text{ref}}$. Учитывая, что вектор $\boldsymbol{L}$ — единичный, а модуль вектора $\boldsymbol{V}_{\text{ref}}$ с требуемой точностью равен скорости света, синус угла α представим в виде

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{|[\boldsymbol{L}\boldsymbol{V}_{\text{ref}}]|}{|\boldsymbol{L}|\,|\boldsymbol{V}_{\text{ref}}|} = \frac{1}{c}\Big\{\big(L_xV_y^{\text{ref}} - L_yV_x^{\text{ref}}\big)^2 + \\ &+ \big(L_xV_z^{\text{ref}} - L_zV_x^{\text{ref}}\big)^2 + \big(L_zV_y^{\text{ref}} - L_yV_z^{\text{ref}}\big)^2\Big\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Так как аналитические выражения для входящих в формулу (16) компонент векторов очень громоздки, то дальнейшее исследование будем проводить на основе численных вычислений.

5. Результаты численных расчетов

Полученные формулы позволяют исследовать, как изменяется угол между направлением, по которому световой импульс попадает на ретрорефлектор ИСЗ, и направлением, по которому он отражается.

Предположим, что ИСЗ оснащен призменным уголковым отражателем производства АО «НПК “СПП”», имеющим [21] диаметр вписанной окружности D, равный 27 мм, и длина волны используемого лазерного излучения равна $\lambda = 532$ нм. Распределение потока энергии отраженного светового импульса по его поперечному сечению описывается формулой (2). В качестве ИСЗ выберем два космических аппарата [22]: высокоорбитальный «Эталон-2» (радиус орбиты 25 498 км, наклонение 65.5°) и низкоорбитальный «Jason-2» (радиус орбиты 7714 км, наклонение 66°), имеющие на внешних панелях уголковые лазерные отражатели. Предположим далее, что лазерная локация этих ИСЗ осуществляется со станции [22] «Светлое» (60.5332° с. ш., 29.7805° в. д., высота над геоидом 69 м).

Проведенный численный расчет показал, что $\sin\alpha$, определяемый соотношением (19), при нахождении ИСЗ «Эталон-2» в области локации (9) сначала возрастает от $2.72 \cdot 10^{-5}$ до $2.76 \cdot 10^{-5}$, а затем убывает до $2.7 \cdot 10^{-5}$ (рис. 2). Это соответствует изменению параметра η от 4.34 до 4.4 и затем до 4.3.

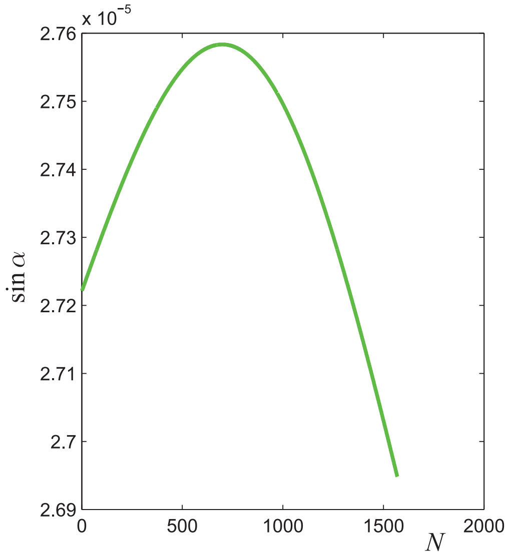

Рис. 2. Изменение величины $\sin\alpha$ от номера импульса N при локации ИСЗ, движущегося в области, определяемой соотношением (9)

Таким образом, при локации этого ИСЗ лазерная станция попадает в область графика, изображенного на рис. 1, между первым нулем и вторым максимумом.

При локации низкоорбитального ИСЗ «Jason-2» $\sin\alpha$ сначала возрастает от $4.6 \cdot 10^{-5}$ до $4.75 \cdot 10^{-5}$, а затем убывает до $4.5 \cdot 10^{-5}$. Это соответствует изменению параметра η от 7.3 до 7.64 и затем до 7.2. Таким образом, при локации этого ИСЗ лазерная станция попадает в область графика, изображенного на рис. 1, между вторым максимумом и вторым нулем. Большее значение $\sin\alpha$ для низкоорбитальных ИСЗ, по сравнению с высокоорбитальными ИСЗ, связано с большей орбитальной скоростью первых по сранению с последними. Действительно, из формулы (1) следует, что в невращающейся геоцентрической системе отсчета максимум $\sin\alpha$ достигает значения $2V_S/c$. Так как орбитальная скорость ИСЗ обратно пропорциональна квадратному корню из радиуса орбиты, то $\sin\alpha \sim 1/\sqrt{R_0}$. Переход от невращающейся геоцентрической системы отсчета к топоцентрической системе отсчета, вращающейся вместе с Землей, также вносит свой вклад в величину $\sin\alpha$.

Оценим теперь, во сколько раз поток энергии отраженного светового импульса, принимаемый неподвижным телескопом лазерной станции, меньше, чем поток энергии, принимаемый подвижным телескопом, который следует по поверхности Земли за центрами пятен отраженных световых импульсов. Введем коэффициент уменьшения ξ, равный $\xi = \sigma(\eta)/\sigma(0)$. Этот коэффициент будет показывать, во сколько раз поток энергии отраженного светового импульса, принимаемый телескопом лазерной станции, меньше потока энергии, принимаемого подвижным телескопом, который следует за центрами пятен.

Численный расчет показал, что в случае локации ИСЗ «Эталон-2» коэффициент ξ изменяется в пределах от $6.5 \cdot 10^{-3}$ до $8.5 \cdot 10^{-3}$ (рис. 3).

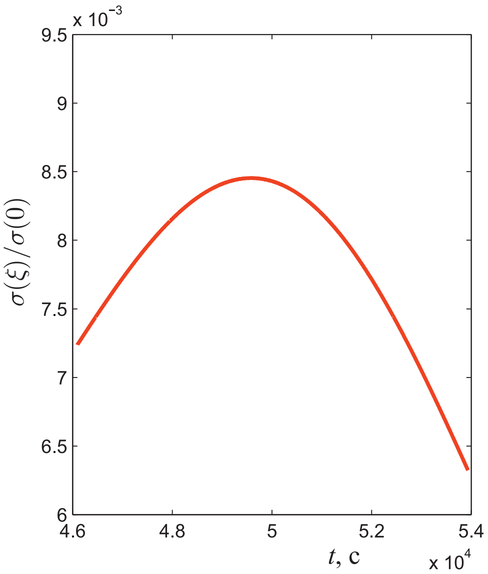

Рис. 3. Зависимость от времени величины коэффициента уменьшения ξ принимаемого потока отраженного лазерного импульса в месте нахождения лазерной станции по сравнению с потоком в центре пятна

Так как изменение параметра η при локации высокоорбитальных и низкоорбитальных ИСЗ по порядку величины совпадают, то и изменение коэффициента ξ для них по порядку величины совпадают.

Поэтому использование подвижного приемного телескопа, который следует по поверхности Земли за центрами пятен отраженных световых импульсов, позволит увеличить величину принимаемого им потока энергии более чем в 100 раз по сравнению со стационарным телескопом лазерной станции.

Как показывают численные расчеты, максимальная скорость движения такого телескопа по поверхности Земли не превышает 8 км/ч.

Заключение

Проведенное исследование показало, что в силу релятивистского закона преобразования углов ретрорефлектор, движущийся по орбите, отражает лазерные импульсы не строго обратно, а под некоторым углом к этому направлению. Поэтому лазерная станция оказывается не в центре отраженного пятна, а на его периферии. В результате поток энергии, принимаемый стационарным телескопом лазерной станции, оказывается значительно меньше потока энергии, чем в центре пятна.

Величину принимаемого потока энергии от ретрорефлекторов ИСЗ можно увеличить более чем в 100 раз, если приемный телескоп отделить от лазерной станции, сделать его подвижным и передвигать по поверхности Земли так, чтобы центр каждого пятна, образуемого отраженными световыми импульсами, попадал в этот телескоп.

Максимальная скорость движения такого телескопа по поверхности Земли не превышает 8 км/ч, что технически реализуемо.

При таком способе локации ИСЗ потребуется изменение приемной и передающей аппаратуры, системы регистрации и программное обеспечение. Однако эти изменения носят технический характер и при современном уровне развития техники они вполне реализуемы. В результате же область уверенного приема отраженных импульсов при лазерной локации ИСЗ значительно увеличится.

Список литературы

1. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970.
2. *Ashby N., Bertotti B.* // Phys. Rev. 1986. **34**, N 8. P. 2246.
3. *Денисов М.М.* Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. **15**, № 4. С. 33.
4. *Кокурин Ю.Л.* // Квантовая электроника. 2003. **33**, № 1. С. 45.
5. *Degnan John.* Presentation and Paper from ILRS Technical Laser Workshop «Satellite, Lunar and Planetary Laser Ranging: Characterizing the Space Segment». INFN-LNF. Frascatti, Italy, November 05–09, 2012.
6. *Denisov V.I., Shvilkin B.N., Sokolov V.A., Vasil'ev M.I.* // Phys. Rev. D. 2016. **94**. P. 045021.
7. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 1. М., 1965.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
9. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961.
10. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.
11. *Denisov V.I., Sokolov V.A., Vasiliev M.I.* // Phys. Rev. D. 2014. **90**. P. 02301.
12. *Денисов В.И., Денисова И.П., Свертилов С.И.* // ТМФ. 2003. **135**, № 2. С. 322. (*Denisov V.I., Denisova I.P., Svertilov S.I.* // Theor. Math. Phys. 2003. **135**, N 2. P. 720.)
13. *Denisov M. M.* // Astronomy reports. 2007. **51**, N 6. P. 512.
14. *Денисов М.М., Кравцов Н.В., Кривченков И.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2007. **85**, № 8. С. 498. (*Denisov M.M., Kravtsov N.V., Krivchenkov I.V.* // JETPh. Lett. 2007. **85**, N 8. P. 412.)
15. *Денисов М.М., Зубрило А.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 6. С. 11. (*Denisov M.M., Zubrilo A.A.* // Moscow University Phys. Bull. 2009. **64**, N 6. P. 56.)
16. *Денисов В.И., Денисов М.М.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. **48**, № 8. С. 1500. (*Denisov V.I., Denisov M.M.* // Comput. Math. and Math. Phys. 2008. **48**, N 8. P. 1418.)
17. *Останина М.В., Пасисниченко М.А., Ростовский В.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 6. С. 42. (*Ostanina M.V., Pasisnichenko M.A., Rostovskii V.S.* // Moscow University Phys. Bull. 2013. **68**, N 6. P. 478.)
18. *Denisov V.I., Svertilov S.I.* // Phys. Rev. D. 2005. **71**, N 6. P. 063002.
19. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. М., 1968.
20. *Денисов М.М.* // Измерит. техника. 2009. **52**, № 11. С. 1167. (*Denisov M.M.* // Measurement techniques. 2009. **52**, N 11. P. 1167.)
21. http://www.npk-spp.ru
22. http://ilrs.gsfc.nasa.gov

The effect of the relativistic transformation law of angles on laser ranging of satellites moving in circular orbits equipped with a single retroreflector

I. V. Mazaeva[1,a], **M. A. Pasisnichenko**[2,b]

[1]*Department of Atmosphere, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
[2]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Department of Applied Mathematics, Information Technology, and Electrical Engineering. Moscow 125993, Russia.*
E-mail: kaf.pmitet.mai@yandex.ru.

It is shown that due to the relativistic transformation law of angles, a laser pulse reflected from a moving retroreflector propagates not strictly back, but at a small angle to the direction of the laser station. For this reason, the ray located on the periphery of a pulse reaches the receiving telescope of the laser station instead of the central ray of a pulse. As a result, the flux of electromagnetic energy received by the laser station is certainly less than the flux of energy in the vicinity of the central ray. The energy flux attenuation coefficient is assessed on the basis of numerical analysis. It is shown that if the receiving telescope is separated from the laser station in order to be mobile and is moving along the Earth's surface so that the center of each spot formed by a pulse of the reflected light hits the telescope, then the electromagnetic energy flux during laser probing of the satellite will be higher by more than 100 times in comparison with the energy flux received by the stationary telescope of the laser station. From our study it follows that the maximum speed of motion of the centers of spots on the Earth's surface does not exceed 8 km/h.

Keywords: relativistic transformation law of angles, laser probing, ray equation, retroreflector.
PACS: 04.20.–q, 42.60.Jf.
Received 7 May 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **72**, No. 4. Pp. 402–409.

Сведения об авторах

1. Мазаева Инга Владимировна — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; e-mail: ingamazaeva@yandex.ru.
2. Пасисниченко Максим Александрович — аспирант; e-mail: kaf.pmitet.mai@yandex.ru.