

Г. А. БЕНДРИКОВ, У. ФОНСЕКА АРАУХО

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

В работе показана возможность определения области устойчивости систем  $n$ -ного порядка без полного построения корневого годографа, пользуясь общими свойствами траекторий корней и нахождением критических значений частот и свободного параметра, получаемых из аналитических уравнений траекторий корней и формул свободного параметра. Рассмотрены различные способы потери устойчивости в зависимости от взаимного расположения начальных и предельных точек траекторий корней. Даны таблицы, позволяющие определить число возможных критических частот системы для заданного  $n$  и  $m$  как для отрицательной, так и для положительной обратных связей.

Как известно [1], построение корневого годографа системы  $n$ -ного порядка с характеристическим уравнением вида

$$F(p) = \Phi_n(p) + \rho\Psi_m(p) = 0 \quad (1)$$

полностью решает вопрос об устойчивости системы. Здесь  $\rho$  — свободный параметр, линейно входящий в  $m+1$  коэффициент уравнения  $F(p)$ , а

$$\Phi_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \quad (2)$$

$$\Psi_m(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$$

полиномы  $p = \delta + j\omega$  целых положительных степеней  $n$  и  $m$  ( $n \geq m$ ) соответственно.

Построение корневого годографа и вычисление параметра траекторий корней  $\rho$  для различных точек траекторий несет полную информацию об устойчивости системы, приближении этой системы к границе устойчивости и определяет характер потери устойчивости. Причем это определяется как для отрицательной, так и для положительной обратных связей системы.

С помощью метода траекторий корней просматривается устойчивость континуума систем (при заданных параметрах семейства траекторий корней) при изменении свободного параметра в области устойчивости или в ряде областей устойчивости (для условно устойчивых систем).

Однако в случае заданных начальных и предельных точек траекторий корней возможно исследование области устойчивости систем

достаточно высокого порядка без построения корневых годографов с использованием общих свойств траекторий корней, уравнения критических частот и критического параметра, где другие методы (например, Рауса—Гурвица) практически мало применимы.

Чтобы подчеркнуть, что по отношению к различным параметрам, линейно входящим в уравнение (1), могут иметь место различные значения  $m$ , изменяющиеся от 0 до  $n$ , вводится понятие класса системы или класса характеристического уравнения  $[n; m]$ .

При заданном уравнении (1) нам известен класс уравнения и, следовательно, асимптотика корневого годографа. Центр асимптот находится в точке

$$a^* = \frac{-\frac{a_1}{a_0} + \frac{b_1}{b_0}}{n-m} = \frac{\sum_1^n p_\nu - \sum_1^m z_\mu}{n-m}. \quad (3)$$

Число асимптот и их направление, углы, образованные асимптотами с положительным направлением оси абсцисс  $\delta$ -плоскости  $p = \delta + j\omega$ , определяются из формулы

$$\varphi_A = \frac{N\pi}{n-m} \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (4)$$

Для определения области устойчивости системы (и других задач исследования систем) весьма существенным является определение критических частот и критического параметра, поэтому возможно более подробно остановимся на определении этих величин.

Как известно [1], уравнение критических частот и формулы критического параметра имеют вид:

$$T(\omega_k^2) = (\alpha_n b_{m-1} - a_{n-1} b_m) - \omega_k^2 (a_n b_{m-3} - a_{n-1} b_{m-2} + a_{n-2} b_{m-1} - a_{n-3} b_m) + \omega_k^4 (a_n b_{m-5} - a_{n-1} b_{m-4} + a_{n-2} b_{m-3} - a_{n-3} b_{m-2} + a_{n-4} b_{m-1} - a_{n-5} b_m) - \dots = 0, \quad (5)$$

$$-\rho_k = \frac{a_n - \omega_k^2 a_{n-2} + \omega_k^4 a_{n-4} - \dots}{b_m - \omega_k^2 b_{m-2} + \omega_k^4 b_{m-4} - \dots} = \frac{a_{n-1} - \omega_k^2 a_{n-3} + \omega_k^4 a_{n-5} - \dots}{b_{m-1} - \omega_k^2 b_{m-3} + \omega_k^4 b_{m-5} - \dots}. \quad (6)$$

и для  $\omega = 0$ :

$$-\rho_k = \frac{a_n}{b_m}. \quad (7)$$

Полагая  $\omega^2 = x$ , уравнения (5) и (6) можно записать в виде

$$T(x) = \sum_0^f c_i x^i = 0, \quad (8)$$

$$-\rho_k = \frac{\sum_0^r (-1)^i a_{n-2i} x^i}{\sum_0^l (-1)^i b_{m-2i} x^i} = \frac{\sum_0^s (-1)^i a_{n-(2i+1)} x^i}{\sum_0^t (-1)^i b_{m-(2i+1)} x^i}, \quad (9)$$

$$c_i = (-1)^i \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^j a_{n-j} b_{(m+i)-(2i+1)}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$f = \frac{n+m-2}{2}, \text{ если } n+m \text{ четное; } f = \frac{n+m-1}{2}, \text{ если } n+m \text{ нечетное.}$$

$$r = \frac{n}{2}, \text{ если } n \text{ четное; } r = \frac{n-1}{2}, \text{ если } n \text{ нечетное.}$$

$$l = \frac{m}{2}, \text{ если } m \text{ четное; } l = \frac{m-1}{2} \text{ если } m \text{ нечетное.}$$

$$s = \frac{n-2}{2}, \text{ если } n \text{ четное; } s = \frac{n-1}{2}, \text{ если } n \text{ нечетное.}$$

$$t = \frac{m-2}{2}, \text{ если } m \text{ четное; } t = \frac{m-1}{2}, \text{ если } m \text{ нечетное.}$$

Для заданных  $n$  и  $m$  все индексы коэффициентов уравнений (5) — (9) отрицательны.

Следует заметить, что уравнение критических частот для  $n$ , больших  $m$ , может иметь степень  $f$  относительно  $x = \omega^2$  значительно более низкую, чем исходное характеристическое уравнение (1). Из уравнения критических частот определяются частоты как для отрицательной ( $\rho > 0$ ), так и для положительной ( $\rho < 0$ ) обратных связей. Число действительных положительных корней уравнения критических частот (5) или (8) полностью определяет число пар возможных пересечений траекториями корней мнимой оси. Поэтому нас интересуют только положительные действительные корни уравнения (8).

Критическое значение свободного параметра всегда может быть вычислено по формулам (6), (7) или (9), если известны критические частоты.

В случае расположения всех начальных точек траекторий корней в левой полуплоскости (при  $\rho = 0$ ) с увеличением  $|\rho|$  траектории корней могут пересекать ось  $j\omega$ . При некотором наименьшем критическом значении параметра  $|\rho_k|$  пара комплексных корней выходит на границу устойчивости. При  $|\rho| > |\rho_k|$  система становится неустойчивой, в этом случае может, вообще говоря, еще и другая пара корней выходить в правую полуплоскость. Однако частотой возбуждения будет только частота, соответствующая наименьшему значению  $|\rho_k|$ .

Потеря устойчивости системы может быть апериодической. В случае систем класса  $[n; 0]$  при расположении начальных точек траекторий корней в левой полуплоскости потеря устойчивости может быть только при  $\rho < 0$  (при положительной связи). Для систем класса  $[n; m]$  ввиду возможности расположения предельных точек в правой полуплоскости апериодическое возбуждение системы наступает как при  $\rho > 0$ , так и при  $\rho < 0$ . По формуле (7) легко определить условие потери апериодической устойчивости.

Рассмотрим возможные случаи перехода траекторий корней через границу колебательной устойчивости в случае различного расположения начальных и предельных точек траекторий корней на плоскости  $p$ .

Колебательная потеря устойчивости систем может быть связана с приближением траекторий корней к асимптотам. Степень  $f$  уравнения критических частот для  $x = \omega^2$  систем класса  $[n; 0]$  всегда совпа-

дает с числом пар комплексно-сопряженных асимптот [2]. Следовательно, колебательная потеря устойчивости в таких системах всегда связана с переходом траекторий корней, приближающихся к асимптотам. Это возможно и для систем класса  $[n, m]$ . Колебательная потеря устойчивости их также может быть связана с асимптодами систем класса  $[n-m; 0]$ .

С переходом траекторий корней через ось  $j\omega$ , направленных к предельным точкам (находящихся, например, в правой полуплоскости). Все траектории корней систем класса  $[n; m=n]$  и  $[n; m=n-1]$  переходят ось  $j\omega$  при расположении начальных точек слева, а всех предельных точек справа от нее.

С некоторыми конфигурациями основных точек траекторий корней вблизи мнимой оси. Последнее может приводить с возрастанием  $|\rho|$  к многократным переходам оси  $j\omega$  одной и той же ветвью траекторий корней (условно устойчивые системы). В частности, это может иметь место при трехкратных (многократных) начальных точках, расположенных вблизи начала координат, и предельных точках на действительной оси вблизи его. Ниже подробно рассмотрим примеры условно устойчивых систем.

Кроме указанных способов отметим возможность потери устойчивости при переходе корней для конечных значений свободного параметра  $\rho = \text{const}$  через бесконечность по действительной оси. Этот способ потери устойчивости возможен только для систем класса  $[n; m=n]$  при положительной обратной связи. А также возможна потеря устойчивости при переходе корней с действительной оси через бесконечность на мнимую ось (или параллельную ей линию) или наоборот.

Возможны различные способы потери устойчивости для систем одного и того же класса. Рассмотрим, например, траектории корней системы класса  $[3; 1]$  при изменении положения предельной точки относительно других основных точек:

$$\text{а) } p^3 + 6p^2 + 11p + 6 + \rho p = 0, \quad \text{б) } p^3 + 5p^2 + 6p + \rho(p+1) = 0, \quad \text{в) } p^3 + 4p^2 + 3p + \rho(p+2) = 0, \\ \text{г) } p^3 + 3p^2 + 2p + \rho(p+3) = 0, \quad \text{д) } p^3 + 3p^2 + 2p + \rho(p+5) = 0.$$

В этом случае (рис. 1) с перемещением предельной точки влево от начала координат центр асимптот  $a^*$  перемещается вправо.

В случае а) вертикальная асимптота проходит через центр асимптот  $a^* = -3$ . Система потеряет устойчивость колебательно при положительной обратной связи ( $\omega_k = \pm 1$ ,  $\rho_k = -10$ ), но при отрицательной обратной связи система абсолютно устойчива (для всех значений  $0 < \rho < \infty$ ). В случаях б), в), г) вертикальная асимптота проходит через точки  $\delta = -2$ ,  $\delta = -1$ ,  $\delta = 0$  соответственно и система абсолютно устойчива при  $\rho > 0$ , а при  $\rho < 0$  неустойчива. При дальнейшем перемещении предельной точки (случай д)) влево от начала координат центр асимптот переходит в правую полуплоскость ( $a^* = +1$ ), поэтому здесь возможна колебательная потеря устойчивости при  $\rho > 0$  ( $\omega_k = \pm \sqrt{5}$ ;  $\rho_k = 3$ ). Рассмотренный пример в некоторой мере иллюстрирует многообразие корневых годографов систем одного и того же класса при различных параметрах системы (при различном задании основных точек траекторий корней).

Рассмотрим уравнения критических частот (5) или (8) и определим степень его  $f$  для различных классов систем  $[n; m]$ , а также определим число пар комплексных асимптот  $h$  и наибольшее число возможных пар пересечений  $g$  оси  $j\omega$ , связанных с наличием предельных точек на плоскости  $p$ .

В табл. 1 даны системы с одинаковыми асимптотическими свойствами, определяемые заданной величиной  $(n-m)$ . Во втором столбце приведены системы класса  $[n; 0]$ . В углу каждой клетки второго столбца дано  $h$  — число пар асимптот, соответствующее числу частот, связанных с асимптотическими свойствами систем этого класса. В других столбцах в углу клетки отмечены величины  $f$ , соответствующие порядку уравнения критических частот относительно  $x = \omega^2$ . Это максимальное число возможных пересечений колебательной границы устойчивости

$$f = h + g, \quad (10)$$

где  $g$  — число возможных пар пересечений оси  $j\omega$ , связанных, вообще говоря, с траекториями корней, идущими в предельные точки. Напомним, что число  $f$  определяет критические частоты системы как для отрицательной, так и для положительной обратных связей.

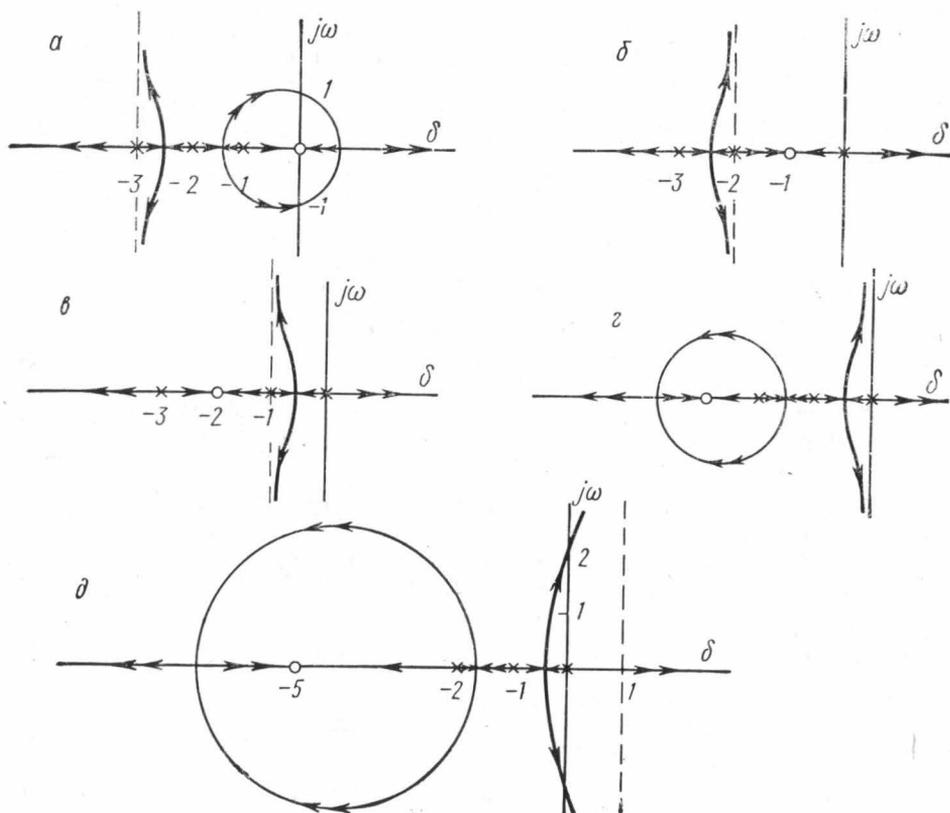


Рис. 1

Предпоследний столбец табл. 1 указывает, как выражено число  $f$  в функции порядка характеристического уравнения  $n$ . По диагонали, указанной в таблице, расположены системы с одинаковыми значениями  $n$ . Проследив значения  $h$  и  $f$  для систем данного порядка  $n$ , можно установить возможное увеличение числа пар пересечений оси  $j\omega$  при увеличении числа предельных точек корневого годографа.

Таблица 1

$n-m$	$[n; 0]^h$	$[n; 1]^f$	$[n; 2]^f$	$[n; 3]^f$	$[n; 4]^f$	$[n; 5]^f$	$[n; 6]^f$	$[n; 7]^f$	$f$	$h$
0		0 1; 1	1 2; 2	2 3; 3	3 4; 4	4 5; 5	5 6; 6	6 7; 7	$n-1$	0
1	0 1; 0	1 2; 1	2 3; 2	3 4; 3	4 5; 4	5 6; 5	6 7; 6	7 8; 7	$n-1$	0
2	0 2; 0	1 3; 1	2 4; 2	3 5; 3	4 6; 4	5 7; 5	6 8; 6	7 9; 7	$n-2$	0
3	1 3; 0	2 4; 1	3 5; 2	4 6; 3	5 7; 4	6 8; 5	7 9; 6	8 10; 7	$n-2$	1
4	1 4; 0	2 5; 1	3 6; 2	4 7; 3	5 8; 4	6 9; 5	7 10; 6	8 11; 7	$n-3$	1
5	2 5; 0	3 6; 1	4 7; 2	5 8; 3	6 9; 4	7 10; 5	8 11; 6	9 12; 7	$n-3$	2
6	2 6; 0	3 7; 1	4 8; 2	5 9; 3	6 10; 4	7 11; 5	8 12; 6	9 13; 7	$n-4$	2
7	3 7; 0	4 8; 1	5 9; 2	6 10; 3	7 11; 4	8 12; 5	9 13; 6	10 14; 7	$n-4$	3
8	3 8; 0	4 9; 1	5 10; 2	6 11; 3	7 12; 4	8 13; 5	9 14; 6	10 15; 7	$n-5$	3
9	4 9; 0	5 10; 1	6 11; 2	7 12; 3	8 13; 4	9 14; 5	10 15; 6	11 16; 7	$n-5$	4
10	4 10; 0	5 11; 1	6 12; 2	7 13; 3	8 14; 4	9 15; 5	10 16; 6	11 17; 7	$n-6$	4
11	5 11; 0	6 12; 1	7 13; 2	8 14; 3	9 15; 4	10 16; 5	11 17; 6	12 18; 7	$n-6$	5
12	5 12; 0	6 13; 1	7 14; 2	8 15; 3	9 16; 4	10 17; 5	11 18; 6	12 19; 7	$n-7$	5

Из табл. 1 видно, что порядок уравнения критических частот равен

$$f = \frac{n+m-2}{2} \text{ для } n+m \text{ четных, и} \quad (11)$$

$$f = \frac{n+m-1}{2} \text{ для } n+m \text{ нечетных.}$$

Из уравнения (10) и табл. 1 также видно, что для систем с  $m \neq n$  число  $g=m$  и для систем с  $m=n$  число  $g=m-1$ .

Перейдем к способам вычисления критических частот по уравнению (5) или (8) и критического значения свободного параметра (6) или (9) для систем различных классов  $[n; m]$ .

Согласно табл. 1, системы пяти классов, для которых  $(n+m)=3$  или 4, имеют уравнение критических частот первого порядка, поэтому можно написать формулы для  $\omega_h$  в функции коэффициентов характеристического уравнения. Подставляя эти значения  $\omega_h$  в формулы, опре-

Таблица 2

$[n; m]$	$a_k^2$	$-\rho_k$
2;1	$\frac{a_2 b_0 - a_1 b_1}{a_0 b_0}$	$\frac{a_2 - a_0 \omega_k^2}{b_1} = \frac{a_1}{b_0}$
2;2	$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_0 - a_0 b_1}$	$\frac{a_2 - a_0 \omega_k^2}{b_2 - b_0 \omega_k^2} = \frac{a_1}{b_1}$
3;0	$\frac{a_2}{a_0}$	$a_3 - a_1 \omega_k^2 = \frac{a_3 a_0 - a_1 a_2}{a_0}$
3;1	$\frac{a_3 b_0 - a_2 b_1}{a_1 b_0 - a_0 b_1}$	$\frac{a_3 - a_1 \omega_k^2}{b_1} = \frac{a_2 - a_0 \omega_k^2}{b_0} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1 b_0 - a_0 b_1}$
4;0	$\frac{a_3}{a_1}$	$a_4 - a_2 \omega_k^2 + a_0 \omega_k^4 = \frac{a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3 + a_0 a_3^2}{a_1^2}$

Таблица 3

$[n; m]$	A	B	C	$-\rho_k$
3;2	$a_0 b_0$	$-a_0 b_2 + a_1 b_1 - a_2 b_0$	$a_2 b_2 - a_3 b_1$	$\frac{a_3 - a_1 \omega_k^2}{b_2 - b_0 \omega_k^2} = \frac{a_2 - a_0 \omega_k^2}{b_1}$
3;3	$a_1 b_0 - a_0 b_1$	$a_0 b_3 - a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_0$	$a_3 b_2 - a_2 b_3$	$\frac{a_3 - a_1 \omega_k^2}{b_3 - b_1 \omega_k^2} = \frac{a_2 - a_0 \omega_k^2}{b_2 - b_0 \omega_k^2}$
4;1	$a_0 b_0$	$a_1 b_1 - a_2 b_0$	$a_4 b_0 - a_3 b_1$	$\frac{a_4 - a_2 \omega_k^2 + a_0 \omega_k^4}{b_1} = \frac{a_3 - a_1 \omega_k^2}{b_0}$
4;2	$a_0 b_1 - a_1 b_0$	$a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0$	$a_4 b_1 - a_3 b_2$	$\frac{a_4 - a_2 \omega_k^2 + a_0 \omega_k^4}{b_2 - b_0 \omega_k^2} = \frac{a_3 - a_1 \omega_k^2}{b_1}$
5;0	$a_0$	$-a_2$	$a_4$	$a_5 - a_3 \omega_k^2 + a_1 \omega_k^4$
5;1	$a_1 b_0 - a_0 b_1$	$a_2 b_1 - a_3 b_0$	$a_5 b_0 - a_4 b_1$	$\frac{a_5 - a_3 \omega_k^2 + a_1 \omega_k^4}{b_1} = \frac{a_4 - a_2 \omega_k^2 + a_0 \omega_k^4}{b_0}$
6;0	$a_1$	$-a_3$	$a_5$	$a_6 - a_4 \omega_k^2 + a_2 \omega_k^4 - a_0 \omega_k^6$

Таблица 4

$[n;m]$	$D$	$E$	$F$	$G$	$-\rho_k$
4; 3	$a_0 b_0$	$a_1 b_1 - a_0 b_2 - a_2 b_0$	$a_2 b_2 + a_4 b_0 - a_1 b_3 - a_3 b_1$	$-a_4 b_2 + a_3 b_3$	$\frac{a_4 - a_2 \omega_k^2 + a_0 \omega_k^4}{b_3 - b_1 \omega_k^2} = \frac{a_3 - a_1 \omega_k^2}{b_2 - b_0 \omega_k^2}$
4; 4	$a_1 b_0 - a_0 b_1$	$a_0 b_3 - a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_0$	$a_1 b_4 - a_2 b_3 + a_3 b_2 - a_4 b_1$	$-a_3 b_4 + a_4 b_3$	$\frac{a_4 - a_2 \omega_k^2 + a_0 \omega_k^4}{b_4 - b_2 \omega_k^2 + b_0 \omega_k^4} = \frac{a_3 - a_1 \omega_k^2}{b_3 - a_1 \omega_k^2}$
5; 2	$a_0 b_0$	$-a_0 b_2 + a_1 b_1 - a_2 b_0$	$a_2 b_2 - a_3 b_1 + a_4 b_0$	$-a_4 b_2 + a_5 b_1$	$\frac{a_5 - a_3 \omega_k^2 + a_1 \omega_k^4}{b_2 - b_0 \omega_k^2} = \frac{a_4 - a_2 \omega_k^2 + a_0 \omega_k^2}{b_1}$
5; 3	$a_0 b_1 - a_1 b_0$	$a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0$	$a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1 - a_5 b_0$	$a_5 b_2 - a_4 b_3$	$\frac{a_5 - a_3 \omega_k^2 + a_1 \omega_k^4}{b_3 - b_1 \omega_k^2} = \frac{a_4 - a_2 \omega_k^2 + a_0 \omega_k^4}{b_2 - b_0 \omega_k^2}$
6; 1	$a_0 b_0$	$a_1 b_1 - a_2 b_0$	$a_3 b_1 - a_4 b_0$	$-a_6 b_6 + a_5 b_1$	$\frac{a_6 - a_4 \omega_k^2 + a_2 \omega_k^4 - a_0 \omega_k^6}{b_1} = \frac{a_5 - a_3 \omega_k^2 + a_1 \omega_k^4}{b_0}$
6; 2	$a_1 b_0 - a_0 b_1$	$-a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_0$	$a_3 b_2 - a_4 b_1 + a_5 b_0$	$a_6 b_1 - a_5 b_2$	$\frac{a_6 - a_4 \omega_k^2 + a_2 \omega_k^4 - a_0 \omega_k^6}{b_2 - b_0 \omega_k^2} = \frac{a_5 - a_3 \omega_k^2 + a_1 \omega_k^4}{b_1}$
7; 0	$a_0$	$-a_2$	$a_4$	$-a_6$	$a_7 - a_5 \omega_k^2 + a_3 \omega_k^4 - a_1 \omega_k^6$
7; 1	$a_1 b_0 - a_0 b_1$	$a_2 b_1 - a_3 b_0$	$a_3 b_0 - a_4 b_1$	$a_7 b_0 - a_6 b_1$	$\frac{a_7 - a_5 \omega_k^2 - a_3 \omega_k^4 - a_1 \omega_k^6}{b_1} = \frac{a_6 - a_4 \omega_k^2 + a_2 \omega_k^4 - a_0 \omega_k^6}{b_0}$
8; 0	$a_1$	$-a_3$	$a_5$	$-a_7$	$a_8 - a_6 \omega_k^2 + a_4 \omega_k^4 - a_2 \omega_k^6 + a_0 \omega_k^8$

деляющие  $\rho_k$ , получаем  $\rho_k$  также в функции коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  характеристического уравнения (1). Эти формулы даны в табл. 2.

Нахождение критических частот систем, для которых  $(n+m) = 5$  или 6, приводит к решению уравнения вида

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (12)$$

где  $x = \omega^2$ . В табл. 3 даны выражения для коэффициентов этого уравнения и формулы для получения значений критического параметра.

Для систем с  $(n+m) = 7$  или 8 критические частоты определяются из кубического уравнения вида

$$Dx^3 + Ex^2 + Fx + G = 0, \quad (13)$$

где  $x = \omega^2$ . В табл. 4 приведены значения коэффициентов этого уравнения и формулы для определения критического параметра. Как видно из табл. 1, для одиннадцати классов систем необходимо решение уравнения 4-й степени, для тринадцати классов — уравнения 5-й степени и т. д. Коэффициенты этих уравнений легко находятся по уравнениям (5) или (8).

Нахождение критических частот в последних случаях может быть произведено численно или построением графика

$$T = T(\omega^2) = T(x) \quad (14)$$

по уравнению (5) или (8). Необходимо построение графика  $T(x)$  только для положительных значений  $x$ . Если нас интересует определенный знак обратной связи, то необходимо построение только части графика в области тех значений  $x$ , где возможно пересечение оси  $j\omega$  четными или только нечетными траекториями.

Проиллюстрируем это на примере системы класса [12; 0]. Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы в виде

$$G_0(p) = \frac{\rho}{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)(p+6)(p+7)(p+8)(p+9)(p+10)(p+11)}. \quad (15)$$

Используя формулы (5) или (8), найдем уравнение критических частот:

$$\omega^{10} - \frac{32670}{66} \omega^8 + \frac{2637558}{66} \omega^6 - \frac{45995730}{66} \omega^4 + \frac{150917976}{66} \omega^2 - \frac{39816800}{66} = 0. \quad (16)$$

По формулам (3) и (4) найдем центр асимптот и наклон асимптот к положительному направлению абсциссы:

$$a^* = -5,5 \text{ и } \varphi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, \dots$$

Используя эти значения, наносим на плоскости  $p$  (рис. 2,а) асимптоты. Зная области пересечения асимптот с осью  $j\omega$ , получим интервалы значений  $\omega$ , где находятся корни уравнения критических частот. Построив график  $T(\omega^2) = T(x)$  (рис. 2,б) или численно решая уравнение (16), найдем значения критических частот:  $\omega_{k1} = 0,538$ ;  $\omega_{k2} = 1,969$ ;  $\omega_{k3} = 4,293$ ;  $\omega_{k4} = 8,553$  и  $\omega_{k5} = 19,976$  и соответствующие им критические значения свободного параметра (рис. 2,б)  $\rho_{k1} = 26,4 \cdot 10^6$ ;  $\rho_{k2} = -4,17 \cdot 10^8$ ;  $\rho_{k3} = 1,27 \cdot 10^9$ ;  $\rho_{k4} = -1,68 \cdot 10^{12}$  и  $\rho_{k5} = 7,22 \cdot 10^{15}$ .

Для системы с положительной обратной связью наступает апериодическое возбуждение системы ( $\rho < 0$ ). Поэтому вычисления  $\omega_{k2}$ ,  $\rho_{k2}$  и

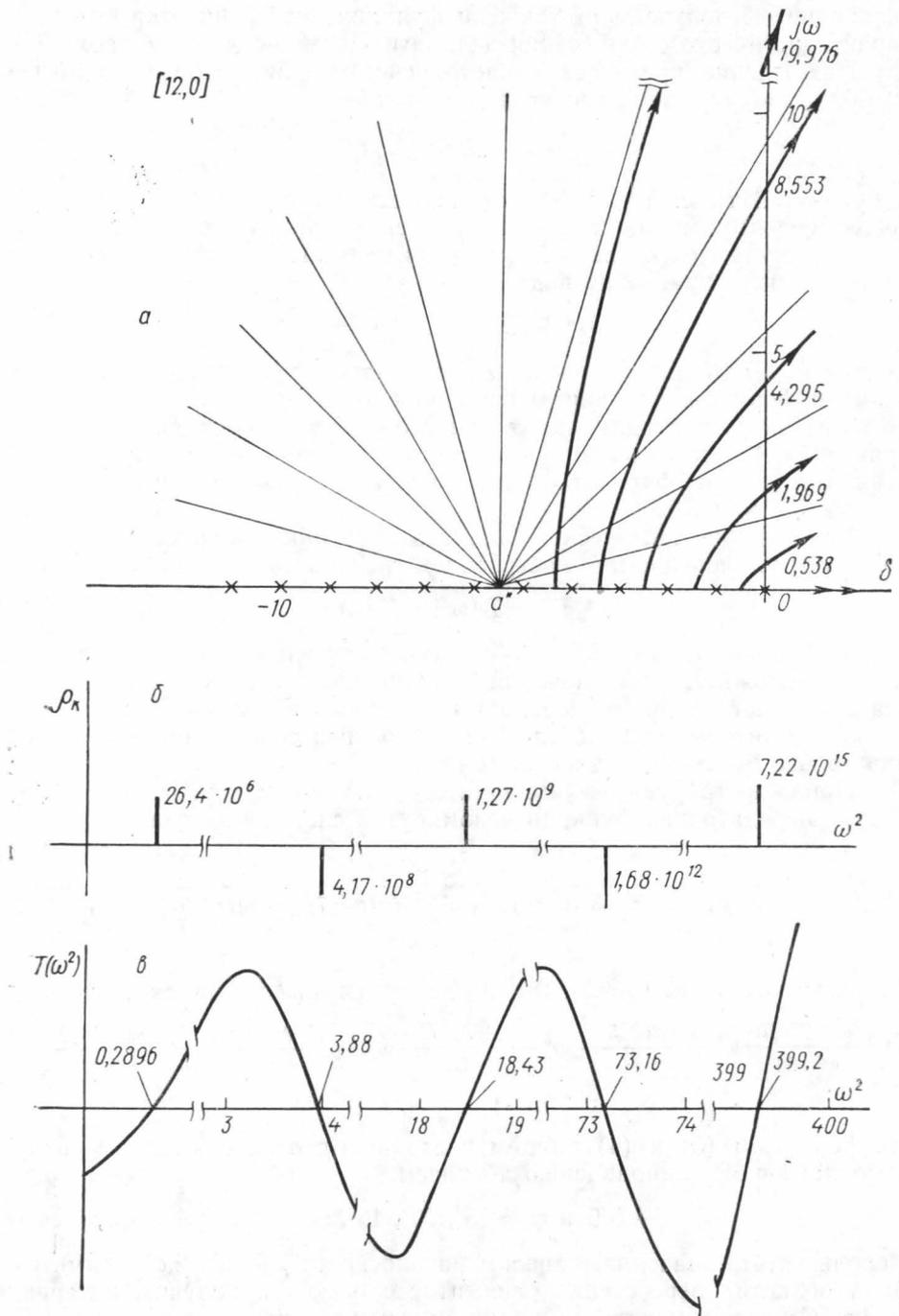


Рис. 2

$\omega_{k4}$  и  $\rho_{k4}$  излишни. При отрицательной обратной связи система выходит на границу колебательной устойчивости при  $\rho_{k1} = 26,4 \cdot 10^6$  и самой низкой частоте  $\omega_{k1} = 0,538$ . Таким образом, исследование устойчивости системы приводит к нахождению наименьшей частоты при  $\rho_k > 0$ . Система устойчива при  $0 < \rho < \rho_{k1}$ .

При исследовании условно устойчивых систем нас интересует в первую очередь знак свободного параметра для всех критических частот. Для этого используем формулы параметра траекторий корней (6) или (9) и для  $\omega=0$  формулу (7).

Если значение параметра  $\rho = \rho(x)$  для ближайших критических частот имеет одинаковый знак, то это может соответствовать условно устойчивым системам (с отрицательной или положительной обратной связью). Некоторые ветви траекторий корней многократно пересекают ось  $j\omega$ .

Рассмотрим примеры.

Пусть задано характеристическое уравнение [3] в виде

$$\rho(\rho - 1)(\rho + 10)^2 + \rho(\rho + 1) = \rho^4 + 19\rho^3 + 80\rho^2 - 100\rho + \rho(\rho + 1) = 0,$$

тогда, используя уравнения (5) и (6), получаем

$$T(x) = x^2 - 61x + 100 = 0 \text{ и } \rho_k = -100 - 19\omega_k^2.$$

Отсюда получаем

$$\omega_{k1} = \pm 1,3; \omega_{k2} = \pm 7,7 \text{ и } \rho_{k1} = 132; \rho_{k2} = 1222.$$

Так как  $\rho_{k1}$  и  $\rho_{k2}$  не меняют знака при  $\omega = \omega_{k1}$  и  $\omega = \omega_{k2}$ , то система является условно устойчивой. На рис. 3 построены траектории корней.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы класса [3; 2] вида

$$(\rho - 0,8)[(\rho + 0,2)^2 + 1] + \rho[(\rho + 1,2)^2 + 4] = 0$$

или

$$(\rho^3 - 0,4\rho^2 + 0,72\rho - 0,832) + \rho(\rho^2 + 2,4\rho + 5,44) = 0.$$

Как видно из уравнения, система аperiodически неустойчива. Траектории корней изображены на рис. 4, хотя, как и в предыдущем случае, нет необходимости точного построения траекторий корней для выяснения области устойчивости.

Согласно табл. 2, уравнение критических частот имеет вид

$$\omega_k^4 - 7,12\omega_k^2 + 5,9936 = 0.$$

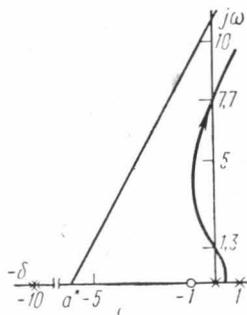


Рис. 3

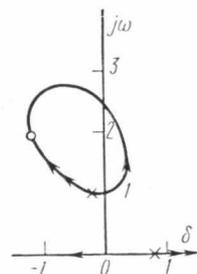


Рис. 4

Отсюда

$$\omega_{k1} = \pm 0,979 \text{ и } \omega_{k2} = \pm 2,481.$$

Значения критического параметра соответственно равны

$$\rho_{k1} = 0,1 \text{ и } \rho_{k2} = 2,666.$$

Действительный корень переходит границу устойчивости (начало координат), согласно (7), при  $\rho_{\omega=0} = 0,152$ . Отсюда следует, что система устойчива при отрицательной обратной связи только при  $+\infty > \rho > \rho_{k2}$ .

Этот пример иллюстрирует возможность перехода траекториями корней мнимой оси дважды, хотя предельные точки находятся в левой полуплоскости.

Как видно из рассмотрения примеров, пользуясь общими свойствами траекторий корней, решение задачи нахождения области устойчивости системы достаточно высокого порядка сводится к определению критических параметров ( $\omega_k$  и  $\rho_k$ ). В результате исследования нам известны области значений параметра  $\rho$ , при которых система устойчива.

Аналогично может быть определен запас устойчивости по различным параметрам системы, линейно входящим в коэффициенты характеристического уравнения [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
2. Теодорчик К. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 1965.
3. Саппон Р. Н. Jr. Dynamics of Physical Systems Mc Graw—Hill N. Y. — L., 1967.
4. Бендриков Г. А., Григорьев А. М. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 12, № 1, 1971.

Поступила в редакцию  
8.11 1971 г.

Кафедра  
физики колебаний