

УДК 534.121.014.2 : 533.601.155

В. П. КАНДИДОВ, С. С. ЧЕСНОКОВ

РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН В ПОТОКЕ ВОЗДУХА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для элемента в потоке, описываемом поршневой теорией, получены матрицы аэродинамической жесткости и демпфирования. Рассматривается поведение в потоке прямоугольных консольных пластин различного удлинения. Результаты по методу конечных элементов хорошо согласуются с данными, полученными методом Ритца и точными решениями.

Для практического решения задач устойчивости упругих систем в потоке воздуха применяются различные приближенные методы, такие, как Галеркина [1, 2], Ритца [3] и другие. Метод конечных элементов [4] используется в настоящее время в основном для расчета статических деформаций и свободных колебаний распределенных систем. Представляет интерес приложение этого метода к решению неконсервативных задач упругой устойчивости.

В настоящей работе метод конечных элементов развивается применительно к расчету динамики пластин в сверхзвуковом потоке. Для определения аэродинамических нагрузок используется поршневая теория [5].

1. Рассмотрим прямоугольный конечный элемент, вершины которого являются узлами $r=1, 2, 3, 4$ (рис. 1).

Формулу поперечного прогиба элемента возьмем в виде

$$\omega(x, y, t) = \psi_{1s}(x, y) a_{sl} q_{1l}(t), \quad (1)$$

где $\psi_{1s}(x, y)$ — строка базисных функций, a_{sl} — некоторая матрица, $q_{1l}(t)$ — вектор обобщенных координат элемента. В качестве компонентов вектора q_{1l} выберем узловые смещения $w_r(t)$ и углы наклона в узлах

$$\varphi_r(t) = \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_r, \quad \theta_r(t) = \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_r.$$

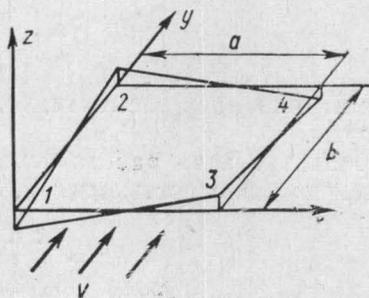


Рис. 1

Тогда

$$q_{r1}(t) = \begin{cases} w_{r1}(t) \\ \varphi_{r1}(t) \\ v_{r1}(t) \end{cases} (r = 1, 2, 3, 4; l = 1, 2, \dots, 12). \quad (2)$$

Вектору перемещений q_{l1} сопряжен вектор обобщенных сил

$$Q_{l1}(t) = \begin{cases} P_{r1}(t) \\ N_{r1}(t) \\ T_{r1}(t) \end{cases}, \quad (3)$$

где $P_{r1}(t)$ — вектор узловых перерезывающих сил, действующих на элемент, $N_{r1}(t)$ и $T_{r1}(t)$ — векторы изгибающих моментов в узлах.

Из динамического принципа виртуальных перемещений следует

$$\delta q_{l1} Q_{l1}(t) - \delta U(t) + \delta A(t) + \delta F(t) = 0, \quad (4)$$

где δU — вариация потенциальной энергии упругой деформации, δA — виртуальная работа сил инерции, δF — виртуальная работа аэродинамических нагрузок.

Для формы прогиба (1) вариация потенциальной энергии будет

$$\delta U = \delta q_{l1} K_{ll} q_{l1}, \quad (5)$$

где K_{ll} — матрица жесткости элемента [4].

Работа сил инерции $f(x, y, t) = -\sigma(x, y) \ddot{w}(x, y, t)$ на перемещении δw равна

$$\delta A = -\delta q_{l1} M_{ll} \ddot{q}_{l1}, \quad (6)$$

$$M_{ll} = a_{ls} \int_0^a \int_0^b \sigma(x, y) \psi_{s1} \psi_{1s} dx dy a_{s1} \quad (7)$$

есть матрица масс элемента, где $\sigma(x, y)$ — поверхностная плотность пластины.

2. Виртуальная работа аэродинамической нагрузки, действующей на элемент с плотностью $p(x, y, t)$, равна

$$\delta F = \int_0^a \int_0^b \delta w p(x, y, t) dx dy. \quad (8)$$

Согласно поршневой теории [5]

$$p(x, y, t) = -\frac{\rho_{\infty} V}{V M^2 - 1} \left(\dot{w}(x, y, t) + V \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right), \quad (9)$$

где V — скорость потока, ρ_{∞} — плотность воздуха, M — число Маха. Подставляя (1) и (9) в (8), находим

$$\delta F = -\frac{\rho_{\infty} V}{V M^2 - 1} \delta q_{l1} [D_{ll} \dot{q}_{l1} + V B_{ll} q_{l1}], \quad (10)$$

$$D_{ll} = a_{ls} \int_0^a \int_0^b \psi_{s1} \psi_{1s} dx dy a_{s1} \quad (11)$$

есть матрица аэродинамического демпфирования,

$$B_{ll} = a_{ls} \int_0^a \int_0^b \psi_{s1} \frac{\partial \psi_{1s}}{\partial y} dx dy a_{s1} \quad (12)$$

матрица аэродинамической жесткости.

Из (4) с учетом (5), (6) и (10) получаем связь обобщенных сил и координат при движении элемента в воздушном потоке

$$Q_{l1} = K_{ll} q_{l1} + M_{ll} \ddot{q}_{l1} + \frac{\rho_{\infty} V}{\sqrt{M^2 - 1}} (D_{ll} \dot{q}_{l1} + V B_{ll} q_{l1}). \quad (13)$$

3. Матрицы аэродинамической жесткости и демпфирования определяются только геометрическими размерами элемента и видом базисных функций $\psi_{1s}(x, y)$. Учитывая структуру вектора q_{l1} (2), эти матрицы удобно разбить на блоки. Например:

$$B_{ll} = \begin{pmatrix} B_{rr}^{(pw)} & B_{rr}^{(p\varphi)} & B_{rr}^{(p\theta)} \\ B_{rr}^{(Nw)} & B_{rr}^{(N\varphi)} & B_{rr}^{(N\theta)} \\ B_{rr}^{(Tw)} & B_{rr}^{(T\varphi)} & B_{rr}^{(T\theta)} \end{pmatrix},$$

здесь $B_{rr}^{(pw)}$ — блок, связывающий перерезывающие силы P_{r1} и смещения w_{r1} ; $B_{rr}^{(p\varphi)}$ — силы P_{r1} и наклоны φ_{r1} и т. д. Для вычисления матриц B и D возьмем систему из четырех базисных функций

$$\psi_{1s} = \left\{ 1, \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{xy}{ab} \right\}. \quad (14)$$

Тогда

$$a_{s1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Подставив (14) и (15) в (11) и (12), получим, что в матрицах B_{ll} и D_{ll} отличны от нуля только блоки $B_{rr}^{(pw)}$ и $D_{rr}^{(pw)}$. Они имеют вид

$$B_{rr}^{(pw)} = \frac{a}{12} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_{rr}^{(pw)} = \frac{ab}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Простые выражения (16) легко могут быть использованы для прямоугольных элементов различных размеров.

Из уравнения выражений (7) и (11) следует, что в случае однородного элемента ($\sigma(x, y) = \text{const}$) матрица масс M_{ll} отличается от D_{ll} только множителем. В частности, при базисных функциях (14) в M_{ll} все блоки равны нулю, кроме $M_{rr}^{(pw)} = \sigma D_{rr}^{(pw)}$.

4. Соседние элементы сопрягаются друг с другом в общих узлах. В результате образуется совокупность конечных элементов, являющаяся моделью непрерывной пластины. Условия сопряжения для обобщенных координат соседних элементов формулируются из требования непрерывности перемещения модели в целом; для обобщенных сил — из требования уравновешенности всех сил в каждой узловой точке. Используя первые из этих условий, можно образовать вектор обобщенных координат модели

$$q_{L1} = \begin{Bmatrix} \omega_{R1} \\ \varphi_{R1} \\ \vartheta_{R1} \end{Bmatrix},$$

где R — число свободных узлов модели.

На основании условий для обобщенных сил из матриц K_{ll} , M_{ll} , D_{ll} и B_{ll} отдельных элементов можно построить соответствующие матрицы K_{LL} , M_{LL} , D_{LL} и B_{LL} всей модели в целом. Уравнение движения модели запишется в виде

$$K_{LL}q_{L1}(t) + M_{LL}\ddot{q}_{L1}(t) + \frac{\rho_{\infty}V}{\sqrt{M^2-1}}(D_{LL}\dot{q}_{L1}(t) + VB_{LL}q_{L1}(t)). \quad (17)$$

В матрицах M_{LL} , D_{LL} , B_{LL} отличны от нуля только блоки $M_{RR}^{(pw)}$, $D_{RR}^{(pw)}$, $B_{RR}^{(pw)}$. Поэтому углы φ_{R1} и ϑ_{R1} в уравнении (17) не являются независимыми переменными и их можно исключить.

В результате получаем

$$K_{RR}^*W_{p1} + M_{RR}^{(pw)}\ddot{W}_{R1} + \frac{\rho_{\infty}V}{\sqrt{M^2-1}}D_{RR}\dot{W}_{R1} + \frac{\rho_{\infty}V^2}{\sqrt{M^2-1}}B_{RR}W_{R1} = 0. \quad (18)$$

Таким образом, число степеней свободы модели равно числу свободных узлов R . Заметим, что у моделей, которые обычно строятся методом конечных элементов, оно не менее $3R$ [4].

Решение системы (18) дает собственные значения $\lambda^j = \delta^j + i\omega^j$ и собственные векторы W_{R1}^j , т. е. коэффициенты затухания ($-\delta^j$), частоты ω^j и формы W_{R1}^j j -того тона колебаний модели в зависимости от скорости потока ($j = 1, 2, \dots, R$).

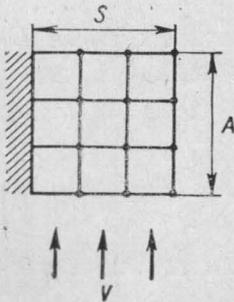


Рис. 2

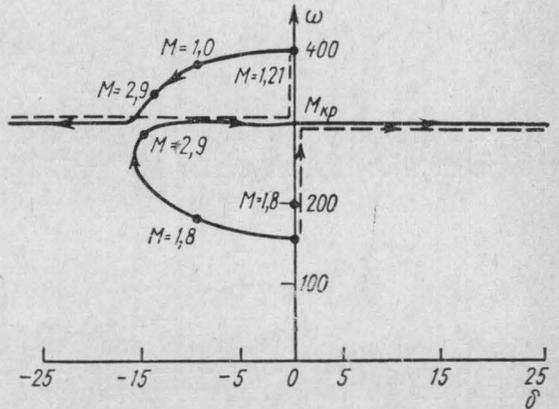


Рис. 3

5. Изложенный способ используется для исследования динамической устойчивости в сверхзвуковом потоке стальной консольной пластины с параметрами: $S=A=0,24$ м, $h=0,0018$ м, $E=1,96 \cdot 10^{11}$ н/м², $\nu=0,3$, $\sigma=14$ кг/м².

На рис. 2 в качестве примера изображено разбиение пластины на 3×3 элемента. Решение уравнения (18) осуществляется на ЭЦВМ типа М-20 по специализированной программе [6]. Результаты приведены на рис. 3, где сплошными линиями изображены корневые портреты для первого и второго тонов пластины при увеличении скорости потока.

С появлением потока оба первых корня λ_1, λ_2 и сопряженные с ними λ_1^*, λ_2^* сначала уходят в левую полуплоскость; колебания пластины на этих тонах являются затухающими. При увеличении скорости оба корня двигаются влево от мнимой оси, одновременно сближаясь друг с другом. Затем, начиная с $M=2,9$, при котором корни λ_1 и λ_2 подходят наиболее близко друг к другу, коэффициент затухания на первом тоне ($-\delta_1$) резко убывает и при $M=M_{кр}$ обращается в нуль. При дальнейшем возрастании M первый корень переходит в правую полуплоскость; в пластине возможны нарастающие колебания, т. е. флаттер. Второй корень λ_2 при этом продолжает смещаться влево так, что частоты на обоих тонах совпадают. Корни, соответствующие третьему и четвертому тонам, остаются в левой полуплоскости; коэффициенты затухания на этих тонах незначительно увеличиваются с ростом M .

Критические числа Маха и частоты, рассчитанные при различных разбиениях пластины на элементы, приведены в первых трех колонках таблицы 1.

Таблица 1

Аэродинамика	Поршневая			Статическая			
	Разбиение	2×2	3×3	4×4	2×2	3×3	4×4
R	6	12	20	6	12	20	15~20
$M_{кр}$	3,028	2,939	2,913	3,086	3,001	2,956	2,782
$\omega_{кр}$	305,3	306,5	306,7	305,8	307,3	307,3	305,4
	1	2	3	4	5	6	7

Из таблицы видна хорошая сходимость результатов при увеличении числа степеней свободы R . Критические числа Маха, рассчитанные при 12 и 20 степенях свободы, различаются на 0,9%, а критические частоты — на 0,1%.

Представляет интерес сравнить результаты расчета методом конечных элементов со значениями, вычисленными с помощью других методов. Запишем критические числа Маха и частоты рассматриваемой пластины в потоке, описываемом статической теорией [2]:

$$p(x, y, t) = - \frac{\rho_{\infty} V^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (19)$$

Результаты расчета при различных разбиениях на элементы представлены в 4—6 колонках таблицы 1. В седьмой колонке помещены критические частоты и числа Маха, найденные методом Ритца [3]. Видно, что для приблизительно одинакового числа степеней свободы (~ 20) результаты расчета обоими методами хорошо согласуются. Критические числа Маха различаются на 6%, частоты на 0,6%.

Как и следовало ожидать [5], отсутствие аэродинамического демпфирования мало влияет на критические значения. Поведение корней, однако, существенно иное. На рис. 3 штриховыми линиями изображены корневые портреты первого и второго тонов пластины, полученные при расчете по статической теории.

6. Для анализа сходимости развиваемого метода при использовании конечных элементов различной формы рассматривались пластины с разными удлинениями. Когда конечные элементы и пластина подобны, числа элементов по каждой стороне совпадают. В общем случае

эти числа различны. При обозначении разбиений примем, что первая цифра указывает число элементов вдоль стороны, расположенной по потоку, вторая — число элементов поперек потока.

Критические числа Маха и частоты вычислены при аэродинамической нагрузке (19). Удобно ввести безразмерные параметры скорости $k = \frac{S^3 \rho_\infty V^2}{D \sqrt{M^2 - 1}}$ и частоты $\Omega^2 = \frac{\omega^2 \sigma S^4}{D}$ (здесь $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины). Критические значения этих параметров, полученные методом конечных элементов и методом Рунца, приведены в таблице 2.

Таблица 2

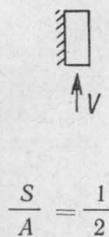
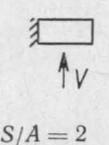
 <p>$\frac{S}{A} = \frac{1}{2}$</p>	Разбиение	2×2	3×3	4×2	4×4	6×3	по [3]
	R	6	12	10	20	21	15~20
	$k_{кр}$	26,7	32,2	31,4	34,4	36,2	36,8
	$\Omega_{кр}^2$	20,1	22,3	23,1	23,8	25,8	25,9
 <p>$S/A = 2$</p>	Разбиение	2×2	2×4	3×3	3×6	4×4	по [3]
	R	6	12	12	24	20	15~20
	$k_{кр}$	159,8	158,6	145,6	144,3	141,1	136,6
	$\Omega_{кр}^2$	100,4	94,5	97,0	91,8	94,6	89,0

Таблица 3

R	4	6	9	по [7]
k_1	6,31	6,32	6,33	6,33
k_2	162,4	161,0	160,8	161
k_3	162,9	161,3	161,3	162

Сходимость результатов для прямоугольных пластин имеет более сложный характер, чем для квадратной пластины. На точность расчета существенно влияет не только число степеней свободы модели, но и число элементов, расположенных по потоку. Так, для пластины с $S/A = 1/2$ при разбиении 6×3 достигается более высокая точность по сравнению с разбиением 4×4 , несмотря на то что число степеней свободы практически совпадает. Аналогичное сравнение можно провести для разбиений 3×3 , 4×2 и других. Это следует учитывать при практических расчетах.

7. Для сравнения метода конечных элементов с точными решениями, рассмотрим классическую задачу о бесконечно длинной полосе

в сверхзвуковом потоке [7] (рис. 4). Аэродинамическая нагрузка берется по формуле (9).

Считая прогиб пластины цилиндрическим, применим конечные элементы стержня [8]. Матрицы M , B , D для них можно получить из (16), положив $\omega_1 = \omega_3$, $\omega_2 = \omega_4$. Матрицу жесткости элемента возьмем из [8].

На рис. 5 изображены корневые портреты, полученные методом конечных элементов для первого (сплошная линия) и второго (пунктирная линия) тонов полосы. По оси абсцисс отложены значения безразмерного коэффициента затухания $\Delta = \delta \sqrt{\frac{\sigma S^4}{D}}$, по оси ординат — безразмерная частота Ω .

При возрастании параметра скорости k корни, соответствующие первым двум тонам, уходят в левую полуплоскость. Частота первого тона уменьшается и при $k = k_1$ обращается в нуль, т. е. корень λ_1 сливается с комплексно-сопряженным λ_1^* . При малом увеличении скорости вырождение снимается и корни первого тона быстро расходятся по действительной оси. Один из них при $k > k_1$ переходит в правую полуплоскость; при этом затухание ($-\Delta_1$) отрицательно. Пластина становится неустойчивой по первому тону, ее движение имеет характер возрастающих во времени неперриодических отклонений, т. е. дивергенции.

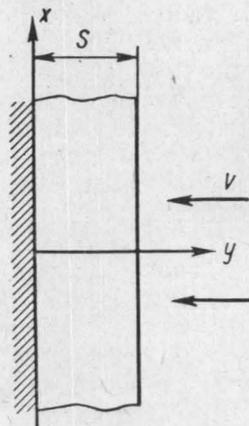


Рис. 4

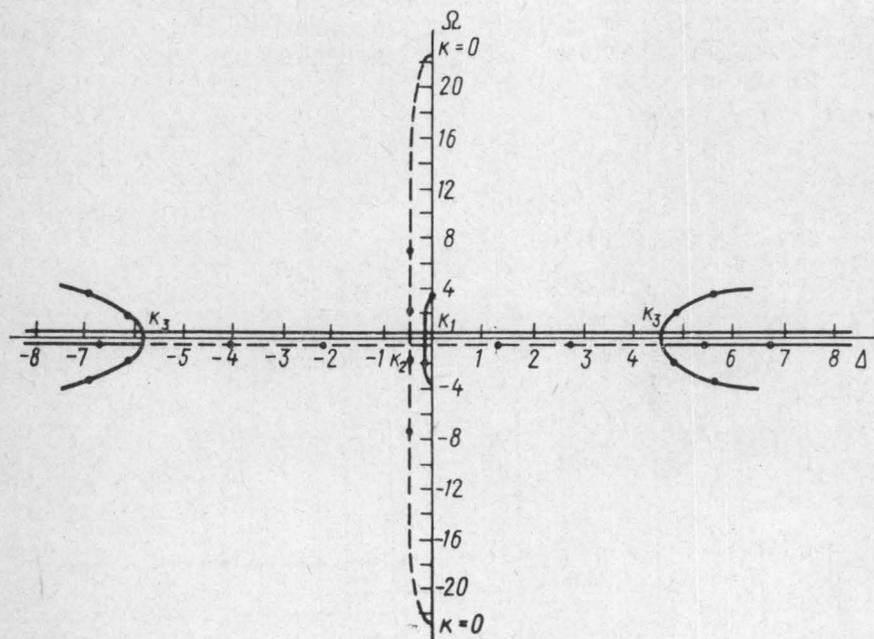


Рис. 5

При дальнейшем увеличении скорости корни первого тона сначала движутся от начала координат, затем начинают возвращаться. Одновременно становится заметным движение корней второго тона.

Когда $k=k_2$, эти корни сливаются, а затем расходятся от начала координат, т. е. наступает дивергенция и по второму тону. При $k>k_2$ корни первого и второго тона движутся по действительной оси навстречу друг другу.

Наконец, со значения $k \geq k_3$ корни становятся комплексно-сопряженными; два из них лежат в правой полуплоскости, т. е. наступает флаттер.

В таблице 3 представлены критические значения, рассчитанные методом конечных элементов при различном числе степеней свободы, а также полученные аналитически в работе [7].

Как видно из таблицы, полученные значения хорошо согласуются с точными. При числе степеней свободы модели $R \geq 6$ относительные отклонения не превышают 0,4%. Практическое значение имеет только первое критическое значение. При $k > k_1$ разрушение пластины наступит, видимо, раньше, чем будут достигнуты следующие критические значения.

8. Таким образом, для простой системы базисных функций получены аналитические выражения матриц аэродинамической жесткости и демпфирования. При их использовании число степеней свободы модели совпадает с числом свободных узлов R . Приведенные примеры расчета устойчивости для ряда консольных пластин свидетельствуют о том, что развиваемый метод имеет хорошую сходимость и при $R \sim 20$ обеспечивает вполне удовлетворительную точность.

Метод конечных элементов имеет точность того же порядка, что и метод Рунге при одном и том же числе степеней свободы. Однако развиваемый метод является более универсальным и простым в применении.

Метод конечных элементов дает большие возможности для исследования неконсервативных задач упругой устойчивости. Он позволяет исследовать поведение корней системы в широких интервалах изменения скорости потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
2. Хеджпет Д. Сб. «Механика», № 2, 1958.
3. Марченко Г. А. «Изв. вузов», авиационная техника, № 3, 1966.
4. Zenkiewicz O. C. The finite element method in structural and continuum mechanics. MC Graw — Hill, 1967.
5. Бисплингхофф Р. А., Эшли Х. Аэроупругость. М., ИЛ, 1958.
6. Вопросы математической эксплуатации вычислительных машин, вып. 2, № 4, изд. ВЦ АН СССР, 1966.
7. Мовчан А. А. «Прикладная математика и механика», 20, вып. 2, 1956.
8. Leckie F. A., Lindberg G. M. The Aeronautical Quarterly. 14, No. 3, 1963.

Поступила в редакцию
25.1 1971 г.

Кафедра
общей физики для мехмата