

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 5 — 1972

УДК 537.591.8

А. К. БАХТАДЗЕ

О ВЫЧИСЛЕНИИ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ БЕЗ УЧЕТА ИОНИЗАЦИИ ПОТЕРЬ

Вычислены моменты по радиусу от функции пространственного распределения электронов в приближении малых углов без учета ионизационных потерь. Получено уравнение для образа Меллина—Лапласа от этой функции.

Вычисление функции пространственного распределения частиц в электронно-фотонном ливне или ее моментов по энергии приводится, например, в [1—8]. Моменты функции пространственного распределения в некоторых работах вычислялись с помощью рекуррентных соотношений, причем в качестве нулевого момента использовалось приближенное выражение для равновесного спектра частиц, функция пространственного распределения строилась по ее моментам. Наиболее общее решение исходных уравнений каскадной теории дано в [6, 8]. В [6] образ Фурье—Лапласа искомой функции представлен в виде степенного ряда, каждый член которого есть полином.

Коэффициенты этого полинома в [6] получены численным методом для максимума каскадной кривой.

В [8] получено дифференциально-разностное уравнение для преобразования Фурье, Меллина, Лапласа от функции пространственного углового распределения, после решения которого функция пространственного распределения или ее моменты могут быть получены после перехода к пределу по одному из двух граничных условий в виде одиночного электрона с энергией E_0 , падающего на границу вещества. В случае произвольных начальных условий, когда угловыми переменными являются косинусы углов между направлением движения частицы и осями координат, при условии, что косинус угла с осью ливня близок к единице, без учета ионизационных потерь исходные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial r} \right) P(E_0, E, t, \bar{r}, \bar{\theta}) = -A'P + B'\Gamma + \\ + \frac{E_k^2}{4E^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \right) P + S_p(E_0, E, t, \bar{r}, \bar{\theta}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \Sigma}\right) \Gamma(E_0, E, t, \bar{r}, \bar{\theta}) = C'P - \sigma_0 \Gamma + S_\Gamma(E_0, E, t, \bar{r}, \bar{\theta}), \quad (2)$$

$$\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\}, \quad \bar{r} = \{x, y\}. \quad (3)$$

Векторы $\bar{\theta}$, $\bar{r}$ — лежат в плоскости, нормальной к оси ливня, θ_1, θ_2 — направляющие косинусы углов между направлением движения частицы и осями x, y . Остальные обозначения те же, что и в [9]. Уравнения (1), (2) умножим на $\exp[-\lambda t + l(\bar{\kappa}\bar{r}) + i(\bar{\xi}\bar{\theta})]$ и проинтегрируем по $t, \bar{r}, \bar{\theta}$. Введем следующее обозначение:

$$P(E_0, E, \lambda, \bar{\kappa}, \bar{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty d\bar{r} \int_{-1}^1 d\bar{\theta} \exp[-\lambda t + i(\bar{\kappa}\bar{r}) + i(\bar{\xi}\bar{\theta})] \cdot P(E_0, E, t, \bar{r}, \bar{\theta}). \quad (4)$$

Преобразование по $\bar{\kappa}, \bar{\xi}$, обратное (4) имеет вид

$$P(E_0, E, t, \bar{r}, \bar{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty d\bar{\kappa} \int_{-\infty}^\infty d\bar{\xi} \exp[-i(\bar{\kappa}\bar{r}) - i(\bar{\xi}\bar{\theta})] \cdot P(E_0, E, t, \bar{\kappa}, \bar{\xi}), \quad (5)$$

$$-1 \leq \theta_{1,2} \leq 1.$$

При $\bar{\xi}=0$ после интегрирования по $\bar{\theta}$ и аргументу r получим преобразование для пространственной функции

$$P(E_0, E, t, \kappa, \xi=0) = \int_0^\infty dr r J_0(\kappa r) P(E_0, E, t, r). \quad (6)$$

Решение уравнений, полученных после преобразования (4) имеет вид

$$P(E_0, E, \lambda, \bar{\kappa}, \bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds E^{-s-1} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{-E_k^2}{4E^2}\right)^n f(E_0, s, \lambda, n, \bar{\kappa}, \bar{\xi}). \quad (7)$$

В дальнейшем будем вычислять функцию пространственного распределения и полагать $\bar{\xi}=0$, поэтому вектора $\bar{\kappa}, \bar{\xi}$ можно считать коллинеарными и заменить на скаляры κ, ξ .

$$f(E_0, s, \lambda, n, \kappa, \xi) = \Phi(E_0, s, \lambda, \kappa) \sum_{m=0}^{2n} \kappa^{2n-m} \xi^m a_m(s, \lambda, n),$$

$$\Phi(E_0, s, \lambda, \kappa) = P(E_0, s, t=0, \kappa) + S_p(E_0, s, \lambda, \kappa) + \frac{B(s)}{\lambda + \sigma_0} \left[\Gamma(E_0, s, t=0, \kappa) + S_\Gamma(E_0, s, \lambda, \kappa) \right]. \quad (8)$$

Коэффициенты $a_m(s, \lambda, n)$ удовлетворяют следующим конечно-разностным соотношениям:

$$a_0(s, \lambda, n) = \sum_{m=0}^{2n-2} (m+2)! \varphi_{m+2}(s+2n, \lambda) a_m(s, \lambda, n-1), \quad n \geq 1, \quad (9)$$

$$a_1(s, \lambda, n) = \sum_{m=0}^{2n-2} (m+2)! \varphi_{m+1}(s+2n, \lambda) a_m(s, \lambda, n-1), \quad n \geq 1, \quad (10)$$

$$a_k(s, \lambda, n) = \sum_{m=k-2}^{2n-2} \frac{(m+2)!}{k!} \varphi_{m-k+2}(s+2n, \lambda) a_m(s, \lambda, n-1) \quad (11)$$

$$2 \leq k \leq 2n, \quad n \geq 1,$$

$$a_0(s, \lambda, 0) = \varphi_0(s, \lambda),$$

$$\varphi_m(s, \lambda) = \sum_{i=1}^2 \frac{H_i(s)}{[\lambda - \lambda_i(s)]} m+1, \quad m \geq 0. \quad (12)$$

Следующая система является эквивалентной системе (9) — (12)

$$a_0(s, \lambda, n) = \sum_{m=2}^{2n} A_{0m}(s, \lambda, n) a_m(s, \lambda, n), \quad n \geq 1, \quad (13)$$

$$a_k(s, \lambda, n) = \sum_{m=k+1}^{2n} A_{km}(s, \lambda, n) a_m(s, \lambda, n), \quad (14)$$

$$1 \leq k \leq 2n-1, \quad n \geq 1.$$

Функции A_{km} удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{m=2}^e \frac{1}{m!} \varphi_{l-m}(s+2n, \lambda) A_{0m}(s, \lambda, n) =$$

$$= \varphi_l(s+2n, \lambda); \quad 2 \leq l \leq 2n, \quad n \geq 1, \quad (15)$$

$$\sum_{m=2}^l \frac{1}{m!} \varphi_{l-m}(s+2n, \lambda) A_{1m}(s, \lambda, n) =$$

$$= \varphi_{l-1}(s+2n, \lambda); \quad 2 \leq l \leq 2n, \quad n \geq 1, \quad (16)$$

$$\sum_{m=k+1}^l \frac{l!}{m!} \varphi_{l-m}(s+2n, \lambda) A_{km}(s, \lambda, n) =$$

$$= \frac{l!}{k!} \varphi_{l-k}(s+2n, \lambda) + \varphi_0(s+2n, \lambda) A_{k-2l-2}(s, \lambda, n-1), \quad (17)$$

$$k+1 \leq l \leq 2n, \quad 2 \leq k \leq 2n-1.$$

Решения уравнений (13), (14) имеют вид детерминантов, где элементами являются функции A_{km} . Эти детерминанты можно преобразовать, используя соотношения (15) — (17). Тогда, получим следующее уравнение:

$$a_0(s, \lambda, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{n-k2}(s, \lambda, n) a_0(s, \lambda, k), \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Функции Φ_{kl} удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_{k+1l}(s, \lambda, n) = \sum_{m=1}^l \frac{l!}{m!} \varphi_{l-m}(s + 2n - 2k, \lambda) \times$$

$$\times \Phi_{km+2}(s, \lambda, n); \quad 1 \leq l \leq 2n - 2k, \quad 1 \leq k \leq n - 1, \quad (19)$$

$$\Phi_{1l}(s, \lambda, n) = l! \varphi_l(s + 2n, \lambda); \quad 0 \leq l \leq 2n, \quad n \geq 0. \quad (20)$$

Решение уравнения (18) имеет вид

$$a_0(s, \lambda, n) = \varphi_0(s, \lambda) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \Phi_{12}(s, \lambda, 1) & \Phi_{22}(s, \lambda, 2) & \dots & \Phi_{n2}(s, \lambda, n) \\ -1 & \Phi_{12}(s, \lambda, 2) & \dots & \Phi_{n-12}(s, \lambda, n) \\ 0 & -1 & \dots & \Phi_{n-22}(s, \lambda, n) \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \Phi_{12}(s, \lambda, n) \end{vmatrix}. \quad (21)$$

После подстановки функций Φ_{kl} в уравнение (18) можно доказать справедливость следующего уравнения:

$$a_0(s, \lambda, n) = \varphi_0(s, \lambda) \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} a_0(s + 2, \lambda, n - 1), \quad (22)$$

$$n \geq 1.$$

Из уравнений (6) — (8) находим следующее выражение для функции пространственного распределения электронов при произвольных граничных условиях:

$$P(E_0, E, \lambda, r) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} dq \int_0^\infty d\kappa E^{-s-1} \times$$

$$\times \kappa J_0(\kappa r) \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \left(\frac{E_k \kappa}{2E} \right)^{2q} \Phi(E_0, s, \lambda, \kappa) \times$$

$$\times a_0(s, \lambda, q); \quad \alpha > 0, \quad 1 < \beta < 0.$$

Если функция $\Phi(E_0, s, \lambda, \kappa)$ не зависит от κ , можно проинтегрировать по κ

$$P(E_0, E, \lambda, r) = \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} dq E^{-s-1} \times$$

$$\times \left(\frac{E}{E_k} \right)^2 \left(\frac{Er}{E_k} \right)^{-2q-2} [\Gamma(q+1)]^2 \Phi(E_0, s, \lambda) a_0(s, \lambda, q), \quad (23)$$

s	$M(s, 1)$	$M(s, 2)$	$M(s, 3)$	$M(s, 4)$
0,1	0,020328	$2,1757 \cdot 10^{-3}$	$4,2281 \cdot 10^{-4}$	3,2766
0,2	0,041619	$7,8814 \cdot 10^{-3}$	$2,5997 \cdot 10^{-3}$	3,7514
0,3	0,073145	0,021506	0,010877	4,8171
0,4	0,11553	0,048685	0,036126	6,6294
0,5	0,16973	0,098035	0,10578	9,1254
0,6	0,23747	0,18402	0,29028	12,244
0,7	0,32157	0,33202	0,76905	16,502
0,8	0,42617	0,58714	1,9897	24,182
0,9	0,55714	1,0296	5,0430	42,639
1,0	0,72267	1,8010	12,528	94,140
1,1	0,93392	3,1499	30,508	$2,4421 \cdot 10^2$
1,2	1,2059	5,5076	72,871	$6,8153 \cdot 10^2$
1,3	1,5586	9,6148	$1,7081 \cdot 10^2$	$1,9386 \cdot 10^3$
1,4	2,0181	16,729	$3,9314 \cdot 10^2$	$5,4907 \cdot 10^3$
1,5	2,6181	28,958	$8,8877 \cdot 10^2$	$1,5352 \cdot 10^4$
1,6	3,4018	49,789	$1,9738 \cdot 10^3$	$4,2250 \cdot 10^4$
1,7	4,4234	84,912	$4,3062 \cdot 10^3$	$1,1432 \cdot 10^5$
1,8	5,7509	$1,4348 \cdot 10^2$	$9,2287 \cdot 10^3$	$3,0393 \cdot 10^5$
1,9	7,4678	$2,4002 \cdot 10^2$	$1,9424 \cdot 10^4$	$7,9356 \cdot 10^5$
2,0	9,6763	$3,9720 \cdot 10^2$	$4,0145 \cdot 10^4$	$2,0337 \cdot 10^6$
3,1	$1,2457 \cdot 10^2$	$4,7867 \cdot 10^4$	$3,7315 \cdot 10^7$	$1,7102 \cdot 10^{10}$
4,1	$7,5995 \cdot 10^2$	$1,3516 \cdot 10^6$	$4,2396 \cdot 10^9$	$9,6383 \cdot 10^{12}$
5,1	$3,2332 \cdot 10^3$	$1,9826 \cdot 10^7$	$1,9039 \cdot 10^{11}$	$1,5504 \cdot 10^{15}$
6,1	$1,0739 \cdot 10^4$	$1,8623 \cdot 10^8$	$4,5747 \cdot 10^{12}$	—

Функции $M_{10}(s, n)$ для $n = 1, 2, 3, 4$ рассчитанные по формулам (28) — (30).

$$\alpha > 0, \quad -1 < \beta < 0.$$

Функция $a_0(s, \lambda, q)$ пропорциональна функции $\mathfrak{M}_2(q, 0, s, \lambda)$ из работы [8]

$$\Gamma(q+1) a_0(s, \lambda, q) = \mathfrak{M}_2(q, 0, s, \lambda). \quad (24)$$

Функция $a_0(s, t, q)$ представляет из себя бесконечный ряд по экспонентам $e^{\lambda_i(s+2m)t}$ с коэффициентами в виде полиномов по t . Ввиду условия

$$e^{\lambda_1(s)t} \gg e^{\lambda_1(s+2)t} \gg e^{\lambda_1(s+4)t} \gg \dots \quad (25)$$

в этом выражении можно оставить лишь первую экспоненту

$$a_0(s, t, q) \approx \sum_{j=1}^2 H_j(s) M_{j0}(s, q) e^{\lambda_j(s)t}, \quad (26)$$

$$M_{j0}(s, q) = \left. \frac{a_0(s, \lambda, q)}{\varphi_0(s, \lambda)} \right|_{\lambda=\lambda_j(s)}. \quad (27)$$

Функции $M_{j0}(s, n)$ имеют следующий вид для $n = 1, 2, 3, 4$:

$$M_{j0}(s, 1) = 2\varphi_2(s+2, \lambda), \quad \lambda = \lambda_j(s), \quad j = 1, 2, \quad (28)$$

$$M_{j0}(s, 2) = \sum_{v=0}^2 \frac{2(4-v)!}{(2-v)!} \varphi_v(s+2, \lambda) \varphi_{4-v}(s+4, \lambda), \quad \lambda = \lambda_j(s), \quad (29)$$

$$M_{j0}(s, 3) = \sum_{v=0}^2 \sum_{\alpha=0}^{4-v} \frac{2(4-v)!(6-v-\alpha)!}{(2-v)!(4-v-\alpha)!} \times \\ \times \varphi_v(s+2, \lambda) \varphi_\alpha(s+4, \lambda) \varphi_{6-v-\alpha}(s+6, \lambda); \quad \lambda = \lambda_j(s). \quad (30)$$

$$M_{j0}(s, 4) = \sum_{v=0}^2 \sum_{\alpha=0}^{4-v} \sum_{\beta=0}^{6-v-\alpha} \frac{2(4-v)!(6-v-\alpha)!}{(2-v)!(4-v-\alpha)!} \times \\ \times \frac{(8-v-\alpha-\beta)!}{(6-v-\alpha-\beta)!} \varphi_v(s+2, \lambda) \varphi_\alpha(s+4, \lambda) \varphi_\beta(s+6, \lambda) \times \\ \times \varphi_{8-v-\alpha-\beta}(s+8, \lambda); \quad \lambda = \lambda_j(s). \quad (31)$$

Моменты функции пространственного распределения электронов с энергией больше E определяются соотношением

$$\langle r^{2n} \rangle_N = \frac{\int_0^\infty dr r^{2n+1} N_P(E_0, E, t, r)}{\int_0^\infty dr r N_P(E_0, E, t, r)}. \quad (32)$$

После вычисления соответствующих интегралов находим для случая граничных условий в виде одиночного электрона с энергией E_0 :

$$\langle r^{2n} \rangle_N = \left(\frac{E_k}{E} \right)^{2n} (n!)^2 \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s_{1n}-s} \frac{H_1(s_{1n})}{H_1(s)} \times \\ \times \frac{s}{s_{1n}+2n} M_{10}(s_{1n}, n) \left[2\pi \left(\lambda_1''(s) t + \frac{1}{s^2} \right) \right]^{1/2} \times \\ \times \left[2\pi \left(\lambda_1''(s_{1n}) t + \frac{\partial^2}{\partial s_{1n}^2} \ln M_{10}(s_{1n}, n) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(s_{1n} + 2n)^2} \right) \Bigg]^{-\frac{1}{2}} \exp [(\lambda_1(s_{1n}) - \lambda_1(s)) t], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (33)$$

s — каскадный параметр одномерной теории

$$t = - \frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[\ln \frac{E_0}{E} - \frac{1}{s} \right]. \quad (34)$$

Параметр s_{1n} есть решение трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s_{1n} + 2n} + \frac{\partial}{\partial s_{1n}} \ln M_{10}(s_{1n}, n) + [\lambda_1'(s_{1n}) - \lambda_1'(s)] t = 0. \quad (35)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький С. З. Лавинные процессы в космических лучах. М., Гостехиздат, 1948.
2. Roberg J., Nordheim L. W. Phys. Rev., **75**, 444, 1949.
3. Eyges L., Fernbach S. Phys. Rev., **82**, 23, 1951.
4. Green H. S., Messel H. Phys. Rev., **88**, 331, 1952.
5. Green H. S., Bergmann O. Phys. Rev., **95**, 516, 1954.
6. Moliere G. Vorträge über Kosmische Strahlung. (Hrsg. von Heisenberg W). Berlin, Springer-Verlag, 1953.
7. Гужавин В. В., Иваненко И. П. ДАН СССР, **115**, № 6, 1089, 1957.
8. Nishimura J., Kamata K. Suppl. Progr. Theor. Phys., **6**, 93—155, 1958.
9. Бахтадзе А. К. «Вестн. Моск. ун-та». физ., астрон., № 4, 39, 1967.

Поступила в редакцию
25.9 1970 г.

НИИЯФ