

В. Б. ГОСТЕВ, А. Г. ЛЕССКИС

ДВУХЧАСТИЧНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ЛИ

Для упрощения расчетов проведена модификация модели Ли путем замены коммутационных соотношений Ферми для тяжелых частиц на соотношения Бозе. Исследованы дискретные стационарные состояния в секторах с двумя тяжелыми частицами и произвольным числом легких частиц. Методом, существенно отличным от теории возмущений, показано, что в каждом секторе существует не более одного связанного состояния. В пределе сильной связи уровни энергии разных двухчастичных секторов эквидистантны.

Несмотря на то что задача о двухчастичных состояниях (рассеяния и дискретных) в модели Ли была поставлена давно [1], она до сих пор далека от разрешения. В настоящей статье качественно определяется зависимость глубины уровней энергии связанных состояний двух тяжелых частиц (V и N) и произвольного числа легких θ -частиц) модели Ли от величины связи (λ_0^2) и дается оценка числа этих уровней с помощью модификации модели.

Обычно при рассмотрении таких связанных состояний в оригинальной модели Ли [2] приходится вводить расстояние r между частицами как некоторую произвольную фиксированную величину (например [1, 3 и 4]). Параметр r при таком подходе является чисто внешним по отношению к модели, и возникает естественное желание исключить его из рассмотрения. Простейший выход — положить $r=0$. Однако это невозможно, пока V и N — фермионы. Если же считать V и N бозонами и положить $r=0$, то никаких противоречий не возникает, и мы получаем простую возможность рассматривать состояния с двумя (а также тремя, четырьмя и т. д.) тяжелыми частицами, фиксированными в одной точке. (В одночастичных секторах такое изменение коммутационных соотношений не меняет ни одного уравнения.) Соответствующую модель назовем модифицированной моделью Ли. Гамильтониан такой модели совпадает с гамильтонианом обычной модели Ли [2, 5 и 6]:

$$H = m_V V^\dagger V + m_N N^\dagger N + \int \omega a^\dagger(k) a(k) dk + \\ + \lambda_0 \int u(k) [V^\dagger N a(k) + V N^\dagger a(k)] dk - \delta m V^\dagger V, \quad (1)$$

а операторы рождения (уничтожения) удовлетворяют соотношениям коммутации Бозе:

$$[a(k), a^+(k')] = \delta^3(k - k'); [N, N^+] = [V, V] = 1 \quad (2)$$

(остальные коммутаторы равны нулю); $\omega = \omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$ — масса θ -частицы принята за 1, $u(k)$ — вещественная, монотонно убывающая функция обрезания, λ_0 — неперенормированная константа связи и

$$\delta m = -\lambda_0^2 \int \frac{u^2 dk}{m_N + \omega - m_V} \quad (3)$$

постоянная перенормировки массы V -частицы [5], V -частица предполагается стабильной, т. е.

$$m_V < m_N + 1. \quad (4)$$

Наличие интегралов движения

$$B = V^+V + N^+N, \quad Q = -N^+N + \int a^+(k) a(k) dk \quad (5)$$

позволяет разбить пространство состояний на секторы [5, 6] — подпространства, инвариантные относительно H , B и Q одновременно.

Все результаты, полученные в однобарионных секторах ($B=1$) обычной модели Ли, автоматически переносятся на те же секторы модифицированной модели. В работе [7] показано, что в каждом таком секторе ($B=1$, Q — любое) не может быть более одного дискретного уровня, причем в пределе $\lambda_0^2 \rightarrow \infty$ этот уровень обязательно существует.

В настоящей статье с помощью приближенных методов исследуется дискретный спектр гамильтониана (1) в секторах с $B=2$ и произвольным Q . Оказывается, что в этих секторах удастся повторить основные результаты работы [7]. Все рассмотрение проводится по той же схеме, что и в [7]. Уравнение Шредингера

$$H|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle \quad (6)$$

в каждом секторе приводит к замкнутой системе интегральных уравнений для волновых функций состояния $|\Phi\rangle$. Приближенное решение этих уравнений методом замены ядра на вырожденное приводит к характеристическому уравнению для E . Дискретные состояния выделяются с помощью условия

$$\langle \Phi | \Phi \rangle < \infty \quad (7)$$

Сектор VN ($B=2$, $Q=-1$)

Общий вид состояния в этом секторе

$$|\Phi\rangle = \left[V^+N^+ + \int \varphi(k) dk a^+(k) N^+N^+ \right] |0\rangle \quad (8)$$

при подстановке в уравнение (6) приводит к системе

$$\begin{aligned} m_V + m_N - E - \delta m + 2\lambda_0 \int u \varphi dk &= 0, \\ (2m_N + \omega - E) \varphi + \lambda_0 u &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Условие (7) сводится к ограничению $E < 2m_N + 1$ на дискретные значения E . (Значение $E = 2m_N + 1$ является порогом $NN\theta$ -рассеяния.) При этом условии из (9) получаем точное характеристическое уравнение

$$h_2(E) \equiv m_V + m_N - E - \delta m - 2\lambda_0^2 \int \frac{u^2 dk}{2m_N + \omega - E} = 0. \quad (10)$$

Это уравнение всегда имеет единственный корень E_0 . Исследование уравнения (10) дает следующую информацию о зависимости E_0 от силы связи (λ_0^2):

$$\frac{dE}{d\lambda_0^2} < 0,$$

$$E_0 = m_V + m_N + \delta m + o(\lambda_0^2), \text{ при } \lambda_0^2 \rightarrow 0$$

$$\lim_{\lambda_0^2 \rightarrow \infty} E_0 = E_0^\infty > -\infty.$$

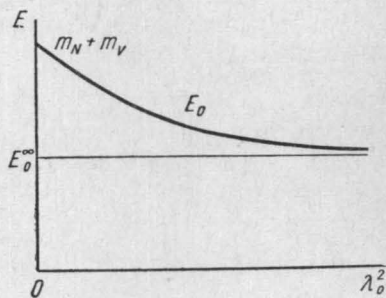


Рис. 1

Примерный вид зависимости $E_0(\lambda_0^2)$ показан на рис. 1. Таким образом, система (9) приводит к единственному состоянию с энергией E_0 , которое интерпретируется как связанное VN -состояние.

Сектор VV ($B=2$, $Q=0$)

В секторе VV уравнение (6) для состояния

$$|\Phi\rangle = \left[\overset{++}{VV} + \int \varphi(k) d\overset{+}{k} a^\dagger(k) \overset{++}{NV} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \psi(k_1, k_2) dk_1 dk_2 \overset{+}{a}(k_1) \overset{+}{a}(k_2) NN \right] |0\rangle \quad (11)$$

приводит к более сложной системе]

$$2(m_V - \delta m) - E = -\lambda_0 \int u \varphi dk,$$

$$(m_V - \delta m + m_N + \omega_1 - E) \varphi(k_1) = -2\lambda_0 \left[u(k_1) + \sqrt{2} \int \psi(k_1, k_2) u(k_2) dk_2 \right],$$

$$(2m_N + \omega_1 + \omega_2 - E) \psi(k_1, k_2) = -\frac{\lambda_0}{\sqrt{2}} \left[u(k_1) \varphi(k_2) + u(k_2) \varphi(k_1) \right]. \quad (12)$$

Исключая ψ , получаем для φ интегральное уравнение

$$\varphi(k) = -\frac{2\lambda_0 u(k)}{h_2(E - \omega)} \left[1 - \lambda_0^2 \int \frac{u(k') \varphi(k') dk'}{2m_N + \omega + \omega' - E} \right], \quad (13)$$

где $h_2(E)$ — левая часть уравнения (10). Нормируемость $|\Phi\rangle$ эквивалентна отсутствию полюсов у $\varphi(k)$ и приводит к ограничению на дискретные значения E :

$$E < E_0 + 1, \quad (14)$$

E_0+1 — порог рассеяния одной θ -частицы на связанном VN -состоянии. Отметим, что в отличие от сектора рассмотренного выше, где порог непрерывного спектра $E=2m_N+1$ не зависел от силы связи (λ_0^2), в секторе VV (как и во всех рассматриваемых ниже) этот порог зависит от λ_0^2 , поскольку $E_0 = E_0(\lambda_0^2)$.

Для приближенного решения уравнения (13) заменим ω' на 1 (см. [7, 8]). Хотя такой метод основан на наличии обрезания при достаточно малых энергиях [8], он выгодно отличается от теории возмущений тем, что не накладывает ограничений на величину константы связи λ_0^2 , зависимость решения от которой нас интересует. После указанной замены ($\omega' \rightarrow 1$) уравнение (13) решается элементарно и приводит к характеристическому уравнению для дискретных уровней E в секторе VV :

$$2\lambda_0^2 T_1(E) = 1, \\ T_1(E) = \int dk T_1(k, E) = \int \left(\frac{1}{2m_N + \omega + 1 - E} + \frac{1}{2m_V - 2\delta m - E} \right) \times \\ \times \frac{u^2 dk}{h_2(E - \omega)}. \quad (15)$$

Функция $T_1(E)$ определена для вещественных E только при условии (14). Исследование уравнения (15) приводит к следующим результатам.

1. Уравнение (15) имеет не более одного корня.
2. При достаточно слабой связи, точнее при

$$0 < \lambda_0^2 < \bar{\gamma} = a(0) \left[\int \frac{a(k) - a(0)}{a(k) + a(0)} \cdot \frac{u^2 dk}{a(k)} \right]^{-1}, \\ a(k) = m_N + \omega(k) - m_V,$$

а также в пределе «сильной связи» ($\lambda_0^2 \rightarrow \infty$) этот корень E_1 обязательно существует, причем

$$\lim_{\lambda_0^2 \rightarrow \infty} E_1 = E_1^\infty > -\infty. \quad (16)$$

3. Во всей области существования корня E_1 монотонно убывает с ростом λ_0^2 :

$$\frac{dE_1}{d\lambda_0^2} \leq 0; \quad \frac{dE_1}{d\lambda_0^2} \Big|_{\lambda_0^2=0} = 0. \quad (17)$$

4. При $\lambda_0^2 \geq \bar{\gamma}$ возможен такой подбор масс (не нарушающий условие стабильности V -частицы (4)), что уравнение (15) не имеет корня. Точнее, если перейти к пределу $\lambda_0^2 \rightarrow +0$, $a(0) \rightarrow +0$ (так, чтобы неравенство $\lambda_0^2 > \bar{\gamma}$ сохранялось), то условие (14) нарушается. Таким образом дискретное VV -состояние переходит в непрерывный спектр. Точное значение λ_0^2 , при котором это происходит, можно определить, решая систему

$$2\lambda_0^2 T_1(E) = 1, \\ h_2(E - 1) = 0. \quad (18)$$

Поскольку в пределе $\lambda_0^2 \rightarrow \infty$ корень E_1 существует, то при достаточно больших λ_0^2 VV -состояние должно опять переходить в дискретный спектр, и значит система (16) имеет по крайней мере два решения: $\lambda_0^2 = \gamma_1$ и $\gamma_2 > 0$.

Следует иметь в виду, что такое anomальное поведение дискретного состояния с ростом λ_0^2 имеет место, лишь когда $a(0) = m_N + 1 - m_V > 0$ достаточно мало (масса V -частицы близка к порогу $N\theta$ -рас-

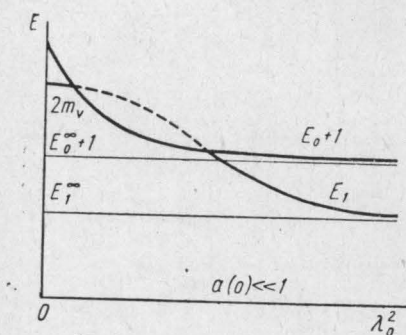


Рис. 2

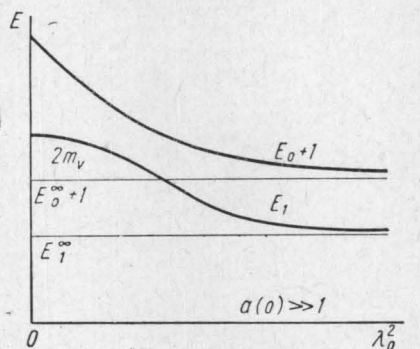


Рис. 3

сеяния), т. е. может считаться исключительным случаем. При достаточно больших $a(0)$ система (18) неразрешима, и единственное дискретное VV -состояние существует при всех $\lambda_0^2 \geq 0$. Примерный график зависимости E_1 от λ_0^2 для двух качественно различных случаев приведен на рис. 2, 3.

Сектор $(VN + n\theta)$ ($B=2$, $Q=n-1$)

В этом секторе произвольное состояние имеет вид

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle = & \frac{1}{V^{(n-1)!}} \int f(k_1, \dots, k_{n-1}) dk_1 \dots dk_{n-1} \overset{+}{a}(k_1) \dots \overset{+}{a}(k_{n-1}) \overset{++}{VV} |0\rangle + \\ & + \frac{1}{V^{n!}} \int \varphi(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n \overset{+}{a}(k_1) \dots \overset{+}{a}(k_n) \overset{++}{VN} |0\rangle + \\ & + \frac{1}{V^{(n+1)!}} \int \psi(k_1, \dots, k_{n+1}) dk_1 \dots dk_{n+1} \overset{+}{a}(k_1) \dots \overset{+}{a}(k_{n+1}) \overset{++}{NN} |0\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Вводя сокращенную запись для волновых функций

$$\begin{aligned} f(k_1, \dots, k_{n-1}) &= f_{n-1} = f, \\ f(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n) &= f_{n-1, \hat{i}} = f_{\hat{i}}, \end{aligned} \quad (20)$$

(для φ и ψ аналогично), систему интегральных уравнений, к которой приводит уравнение (6), можно записать в виде

$$[y_{n-1} - 2(m_V - \delta m)] f = \lambda_0 \sqrt{n} \int \varphi u_n dk_n,$$

$$[y_n - m_N - (m_V - \delta m)] \varphi = \frac{2\lambda_0}{V^n} \sum_{i=1}^n \hat{f} u_i + 2\lambda_0 \sqrt{n+1} \int \psi u_{n+1} dk_{n+1},$$

$$[y_{n+1} - 2m_N] \psi = \frac{\lambda_0}{V^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \varphi \hat{f} u_i, \quad (21)$$

$$u_i = u(k_i); \quad \omega_i = \omega(k_i) = \sqrt{1 + k_i^2}; \quad y_p = E - \sum_{i=1}^p \omega_i. \quad (22)$$

Исключив $\hat{f}$ и ψ , получим уравнение для φ_n :

$$\varphi_n = 2\lambda_0^2 \sum_{i=1}^n \int \left(\frac{1}{2m_N - y_{n+1}} + \frac{1}{2(m_V - \delta m) - y_n - \omega_i} \right) \frac{\varphi_{n-1, \hat{f}} u_i u_{n+1} dk_{n+1}}{h_2(y_n)}. \quad (23)$$

Чтобы решить приближенно это уравнение, заменим ω_{n+1} на 1, тогда получим

$$\varphi_n = 2\lambda_0^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2m_N + 1 - y_n} + \frac{1}{2(m_V - \delta m) - y_n - \omega_i} \right) \frac{\varphi_{n-1, \hat{f}} u_i}{h_2(y_n)},$$

$$\varphi_{n-1} = \int \varphi_n u_n dk_n, \quad \varphi_{n-1, \hat{f}} = \int \varphi_n \hat{f} u_{n+1} dk_{n+1}. \quad (24)$$

Интегрируя это уравнение по k_n с весом u_n , находим уравнение для φ_{n-1} :

$$\varphi_{n-1} = 2\lambda_0^2 \sum_{i=1}^{n-1} \int \left(\frac{1}{2m_N + 1 - y_n} + \frac{1}{2(m_V - \delta m) - \omega_i - (y_{n-1} - 1)} \right) \times$$

$$\times \frac{\varphi_{n-1, \hat{f}} u_i u_n dk_n}{h_2(y_n) [1 - 2\lambda_0^2 T_1(y_{n-1})]}, \quad (25)$$

к которому можно вновь применить описанную выше процедуру. Продолжая ее n раз, получим выражение для φ_n :

$$\varphi_{n-j} = 2\lambda_0^2 \sum_{i=1}^{n-j} u_i \varphi_{n-j-1, \hat{f}} \left(\frac{1}{2m_V + 1 - (y_{n-j} - j)} + \frac{1}{2(m_V - \delta m) - \omega_i - (y_{n-j} - j)} \right) \times$$

$$\times \{h_2(y_{n-j} - j) [1 - 2\lambda_0^2 T_1(y_{n-j} - j + 1)] \dots [1 - 2\lambda_0^2 T_j(y_{n-j})]\}^{-1} \quad (26)$$

($j = 0, 1, \dots, n-1$; $\varphi_0 = \text{const}$) и характеристическое уравнение

$$2\lambda_0^2 T_n(y_0) = 1, \quad y_0 = E, \quad (27)$$

где функции $T_j(y)$ задаются рекуррентной формулой

$$T_j(y) = \int T_j(k, y) dk = \int \frac{T_{j-1}(k, y-1) dk}{1 - 2\lambda_0^2 T_{j-1}(y - \omega)}. \quad (28)$$

Условие (9) приводит к ограничению на энергию дискретного состояния в секторе $(VN+n\theta)$:

$$E_n < \min\{E_0 + n, E_1 + n - 1, \dots, E_{n-1} + 1\}, \quad (29)$$

где $E_0, E_1, \dots, E_{n-1}$ — энергии дискретных состояний в низших секторах $(VN), (VV), \dots, (VN + (n-1)\theta)$ соответственно. Используя соотношения (28), можно доказать единственность решения E_n (27), а также следующие его свойства: в пределе $\lambda_0^2 \rightarrow \infty$ решение всегда существует, причем $\lim_{\lambda_0^2 \rightarrow \infty} E_n = E_n^\infty > -\infty$; для всех $n \geq 2$ в пределе $\lambda_0^2 \rightarrow 0$

решение отсутствует, т. е. при достаточно малых λ_0^2 дискретные состояния в высших секторах исчезают.

Условие (29) приводит к следующему соотношению между уровнями E_n в пределе сильной связи ($\lambda_0^2 \rightarrow \infty$):

$$E_n^\infty < E_{n-1}^\infty + 1. \quad (30)$$

Если в уравнении (27) при вычислении интегралов воспользоваться приближенной формулой

$$\int f(k) \cdot u^2(k) dk \approx f(0) \int u^2(k) dk, \quad (31)$$

то (с той же точностью, что и формула (31)) можно получить оценку для E_n^∞ :

$$E_n^\infty = 2m_V - 1 + (2m_V - 1 - 2m_N)n. \quad (32)$$

Таким образом, в пределе сильной связи ($\lambda_0^2 \rightarrow \infty$) дискретные уровни в рассматриваемых секторах эквидистантны; взаимное расположение их зависит от знака величины $b = 2m_N - 1 - 2m_V$.

Подводя итог, можно сказать, что в каждом двухчастичном секторе модифицированной модели Ли может быть не более одного дискретного состояния. В высших секторах ($Q > 1$) это состояние существует только при достаточно сильной связи.

В заключение заметим, что в связи с возможностью построения унитарной S -матрицы [9] особый интерес представляет исследование дискретных состояний при $\lambda_0^2 < 0$, которое предполагается провести в последствии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weinberg S. Phys. Rev., **102**, 285, 1956.
2. Lee T. D. Phys. Rev., **95**, 1329, 1954.
3. Базь, Зельдович, Переломов. Рассеяние, реакции, распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1966.
4. Bui Q. Duy Nuovo Cimento, **64A**, 813, 1970.
5. Källén G., Pauli W. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **30**, 7, 1955.
6. Heisenberg W. Nucl. Phys., **4**, 532, 1957.
7. Гостев В. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 1, 3, 1967.
8. Гостев В. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 5, 48, 1966.
9. Lee T. D., Wick G. C. Nucl. Phys., **B9**, 209, 1969; **B10**, 1, 1969.

Поступила в редакцию
14.4 1971 г.

Кафедра
квантовой теории