Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1972

УДК 539.1.01

В. Р. ХАЛИЛОВ, Б. В. ХОЛОМАЙ

О ВЛИЯНИИ РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В статье методами классической теории рассматривается задача о движении электрона в постоянном и однородном магнитном поле и поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля. Получены решения уравнений движения электрона в таком поле без затухания, удовлетворяющие определенным начальным условиям. Показано, что учет радиационного трения приводит к эффективному росту средней энергии электрона за большие промежутки времени.

Изучение вопросов движения и электромагнитного излучения заряженных частиц во внешних полях представляет в настоящее время большой интерес в связи с различными приложениями теоретических результатов в астрофизике, ускорителях, в интенсивных лазерных пучках. Особое место в круге этих задач занимают вопросы, связанные с изучением движения и излучения электрона в интенсивных электромагнитных волнах. Сила взаимодействия электрона с интенсивной электромагнитной волной, как известно [1], характеризуется параметром $\mu_0 = \frac{eE_0}{mc\omega}$ (здесь E_0 — амплитуда электрического поля, ω — частота волны), который может изменяться в очень большом диапазоне. Так, величина μ_0 в лазерном пучке пропорциональна $\sim 10^{-12}$—10^{-1}. Однако этот параметр чудовищно велик в волновой зоне пульсара $\mu_0 \sim 10^{13}$. При таком значении μ_0 поле плоской волны близко по своим свойствам с постоянным скрещенным полем [1]. Задача об излучении электрона в поле плоской волны исследовалась ранее многими авторами [1, 2].

К интересным следствиям приводит учет собственного излучения электрона в поле плоской волны [2] (см. также [3]). Оказывается, что средняя энергия электрона в волне растет со временем. Если к полю плоской волны добавить постоянное и однородное магнитное поле, вектор напряженности которого совпадает с направлением распространения электромагнитной волны, то соответствующая задача также разрешима [4, 5]. Электромагнитное излучение электрона в таком поле исследовано в работе [6]. Спектральное и угловое распределение излучения в рассматриваемом поле обладало рядом особенностей, связанных прежде всего с наличием двух характерных частот в данной системе. В работе [7] найдена средняя сила давления света на заряд. Электромагнитные поля такого типа могут быть, например, в окрестности пульсара, где имеется сильное магнитное поле и волны очень высокой интенсивности и низкой частоты.

§ 1. Уравнение движения

Пусть вектор напряженности постоянного и однородного магнитного поля направлен вдоль $z : \vec{H} = (0,\ 0,\ H)$. Вектор-потенциал поля плоской электромагнитной волны выберем в виде:

$$\vec{A} = -\frac{cE_0}{\omega}\{\vec{e}_1 \sin\omega\xi - g\vec{e}_2\cos\omega\xi\}, \tag{1}$$

где E_0—амплитуда электрического поля, ω — частота волны, $\xi = t - \frac{z}{c}$ и $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — орты двумерного ортогонального базиса. Таким образом, в нашем случае векторы электромагнитного и магнитного поля представим в виде

$$\vec{E} = -\vec{A}'(\xi), \quad H = -[\vec{n}\vec{A}'] + \vec{H}n, \quad \vec{n}\parallel oz. \tag{2}$$

Вводя обозначения $m\dot{\vec{r}} = \vec{P}$; $mc^2\dot{t} = \vec{E}$ (точкой обозначено дифференцирование по собственному времени), получим уравнения Лоренца в форме

$$\dot{\vec{P}} = -\frac{e}{mc^2}[\mathrm{E} - c(\vec{n}\vec{P})]\vec{A}' - \frac{e\vec{n}}{mc}(\vec{P}\vec{A}') + \frac{eH}{mc}[\vec{P}\vec{n}],$$

$$\dot{\mathrm{E}} = -\frac{e}{m}(\vec{P}\vec{A}'). \tag{3}$$

Из уравнения (3) с учетом (1) и (2) находим первый интеграл

$$\frac{\mathrm{E} - c(\vec{n}\vec{P})}{mc^2} = \alpha \tag{4}$$

и связь $\xi = \alpha\tau$, τ — «собственное» время электрона. Общее решение системы уравнений (3) с потенциалом (1) и $\vec{H} = (0,\ 0,\ H)$ можно получить в виде

$$x = R_0\cos(\omega_0\xi + \varphi) + \frac{c\mu_0}{\alpha\omega}\frac{1}{1 - g\frac{\omega_0}{\omega}}\cos\omega\xi,$$

$$y = R_0\sin(\omega_0\xi + \varphi) + g\frac{c\mu_0}{\alpha\omega}\frac{1}{1 - g\frac{\omega_0}{\omega}}\sin\omega\xi, \tag{5}$$

$$z = \beta_3 c\xi + g\mu_0\frac{R_0\omega_0}{\alpha\omega}\frac{1}{\left(1 - g\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\sin[(\omega - g\omega_0)\xi + \varphi] + z_0,$$

где

$$\beta_3 = \frac{1}{2\alpha^2}\left[1 + \frac{\mu_0^2}{\left(1 - g\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right] - \frac{1 - \beta^2}{2}; \quad \beta = \frac{R_0\omega_0}{c}; \quad \omega_0 = \frac{eH}{mc\alpha}.$$

Полная энергия частицы дается выражением

$$E = mc^2\alpha + \frac{mc^2}{2\alpha}(1-\alpha^2) + \frac{\pi^2}{2m\alpha}, \tag{6}$$

а

$$\pi = -\frac{e}{c}\vec{A} + \frac{eH}{c}[\vec{r}\vec{n}].$$

Заметим, что (5) и (6) описывают движение электрона в отсутствие резонанса. В дальнейшем нам потребуются решения этих уравнений, удовлетворяющие определенным начальным условиям.

Отметим, что координаты x_0 и y_0 в нашем решении зафиксированы, поэтому в (5) входят четыре константы.

Если электрон в начальный момент времени покоился в точке $z=0$, то константы равны

$$\beta = \frac{R_0\omega_0}{c} = -g\frac{\mu_0}{\alpha}\frac{1}{\left(1-g\frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \tag{7}$$

$$\beta_3 = \frac{\mu_0^2}{\alpha^2}\frac{1}{\left(1-g\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}, \tag{8}$$

$$z_0 = 0, \quad \varphi = 0,$$

причем $\alpha \equiv 1$. В этом случае электрон имеет «дрейфовую» скорость в направлении распространения волны, которая дается формулой (8).

В случае, когда «дрейфовая» скорость электрона в направлении оси z в начальный момент равна нулю, выражение (7) остается справедливым, а $\beta_3=0$, $z_0=0$, $\varphi=0$, причем на α накладываются ограничения

$$\alpha^2 = 1 + \frac{2\mu_0^2}{\left(1-g\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}.$$

Пусть начальные условия таковы, что $z_0=0$, $\varphi=0$:

$$\beta_0 = R_0\frac{\omega_0}{c} + g\frac{\mu_0}{\alpha}\frac{1}{\left(1-g\frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \tag{9}$$

т. е. электрон имеет отличную от нуля начальную скорость в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Если при этом $\dot{z}(0)=0$, то электрон приобретает импульс вдоль z, отличный от (8):

$$\beta_3 = -\frac{g\mu_0}{\alpha}\frac{\beta_0}{\left(1-g\frac{\omega_0}{\omega}\right)} + \frac{\mu_0^2}{\alpha^2}\frac{1}{\left(1-g\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}. \tag{10}$$

Константа α при этом также имеет определенное значение

$$\alpha^2 = \frac{1}{1-\beta_0^2}. \tag{11}$$

Перейдем к исследованию уравнений Дирака—Лоренца для электрона в рассматриваемом поле.

Начальные условия, как будет ясно из дальнейшего, оказывается, существенно влияют на результаты следующего пункта.

§ 2. Радиационная подкачка средней энергии электрона

Рассмотрим уравнение Дирака — Лоренца для точечного электрона в поле плоской электромагнитной волны и однородном магнитном поле:

$$mc\frac{du^\mu}{d\tau}=-e_0F^{\nu\mu}u_\nu+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2}\left[\frac{du}{d\tau}\frac{du_\perp}{d\tau}u^\mu+\frac{d^2u^\mu}{d\tau^2}\right], \tag{12}$$

здесь $F^{\nu\mu}$— максвелловский тензор поля, второй и третий члены справа представляют силу реакций, действующую на электрон при излучении, $u^\mu=(u_x, u_y, u_z, \gamma)$ — безразмерные компоненты 4-скорости

$$\left(\frac{1}{c}\frac{dx}{d\tau},\quad \frac{1}{c}\frac{dy}{d\tau},\quad \frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau}\text{ и }\frac{d\gamma}{d\tau}\right),$$

μ, α, γ пробегают значения от 1 до 4. Предположим при этом, что отдача при излучении относительно мала, так что изменение любой величины за характерное время излучения является малым по сравнению с самой величиной. В этом приближении второй и третий члены справа в формуле (12) можно оценить соответствующими динамическими величинами без включения отдачи.

Введем обозначеная: $\vec{\mu}=\frac{e\vec{E}}{mc\omega}$, $\quad\psi=\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)$, $\quad\eta=\omega\tau$, тогда уравнения движения примут вид:

$$\alpha\frac{du_x}{d\psi}=\mu_x(\psi)(\gamma-u_z)-\frac{\omega_0}{\omega}u_y-\frac{2}{3}\frac{e_0^2\omega}{mc^3}\left[u_x\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2-\frac{d^2u_x}{d\eta^2}\right],$$

$$\alpha\frac{du_y}{d\psi}=\mu_y(\psi)(\gamma-u_z)+\frac{\omega_0}{\omega}u_y-\frac{2}{3}\frac{e_0^2\omega}{mc}\left[u_y\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2-\frac{d^2u_y}{d\eta^2}\right]; \tag{13}$$

$$a\frac{du_z}{d\psi}=-\vec{\mu}\,\vec{u}_\perp-\frac{2}{3}\frac{e_0^2\omega}{mc^3}\left[u_z\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2-\frac{d^2u_z}{d\eta^2}\right],$$

$$\alpha\frac{d\gamma}{d\psi}=-\vec{\mu}u_\perp'-\frac{2}{3}\frac{e_0^2\omega}{mc^3}\left[\gamma\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2-\frac{d^2\gamma}{d\eta^2}\right].$$

Используя решения § 2, запишем:

$$\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2=-\alpha^2\left\{\beta^2\frac{\widetilde{\omega}_0^2}{\omega^2}+\frac{V_0^2}{\left(1-g\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}-2g\beta\frac{\widetilde{\omega}_0}{\omega}\frac{V_0}{\left(1-g\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\psi\left(1-g\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right\},$$

$$\left(\frac{d^2u^\mu}{d\eta^2}\right)=\alpha\left\{-\frac{d\mu_x}{d\psi}\alpha-\alpha\frac{\omega_0}{\omega}\frac{du_y}{d\psi},-\alpha\frac{d\mu^2}{d\psi}+\alpha\frac{\omega_0}{\omega}\frac{du_x}{d\psi},\right.$$

$$\left.-u_\perp\frac{d\vec{\mu}}{d\psi}-\vec{\mu}\frac{du_\perp}{d\psi},-\frac{d\vec{\mu}}{d\psi}u_\perp\quad\vec{\mu}\frac{d\vec{u}_\perp}{d\psi}\right\} \tag{14}$$

$$\left(\widetilde{\omega}_0=\frac{eH}{mc}\text{ — циклотронная частота}\right).$$

Здесь во второе из уравнений (14) входят невозмущенные величины. Учитывая малость отдачи, будем усреднять члены в скобках уравнений (13) по эффективному времени излучения. Таковыми могут быть период волны $T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}$ (при $\omega_0 \ll \omega$), период движения заряда в магнитном поле $T_{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (при $\omega_0 \gg \omega$), либо, наконец, большая величина $T \gg T_\omega, T \gg T_{\omega_0}$. В случае выполнения равенства $\omega = n\omega_0$ (случай кратных частот) усреднение будем проводить за время $T = \frac{2\pi}{\omega}$. С учетом этих замечаний из уравнений (13) получим

$$\frac{d\alpha}{d\psi} = -\tilde{\varepsilon}\alpha^2 \left\{ \left(\beta_0 \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega}\right)^2 + \frac{\alpha^2\omega^2\mu_0^2}{(\alpha\omega - g\tilde{\omega}_0)^2} - 2g \frac{\beta\tilde{\omega}_0\mu\alpha\omega}{\omega(\alpha\omega - g\tilde{\omega}_0)} \times \right.$$

$$\left. \times \sin\psi \left(1 - g\frac{\omega_0}{\omega}\right) \right\},$$

$$\frac{d<u>}{d\psi} = -<\mu_0 e^{ig\psi}> + \frac{i\omega_0}{\omega} <u> - \tilde{\varepsilon}\alpha \left\{ <u> \left[\left(\beta_0 \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2\omega^2\mu_0^2}{(\alpha\omega - g\tilde{\omega}_0)^2} \right] - 2g\beta \frac{\tilde{\omega}_0\alpha\mu_0}{(\alpha\omega - g\tilde{\omega}_0)} <u \sin\psi \left(1 - g\frac{\omega_0}{\omega}\right)> -$$

$$\left. - \frac{1}{\alpha} \frac{d^2<u>}{d\psi^2} \right\},$$

$$\text{где } \tilde{\varepsilon} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2\omega}{mc^2}. \tag{15}$$

Подчеркнем еще раз, что уравнения (15) справедливы в случае, далеком от резонанса. Решение (15) не переходит в соответствующие решения при $\omega = g\omega_0$. Усредним уравнения (15) по периоду $T \gg T_\omega$; $T \gg T_{\omega_0}$. Тогда вместо первого из уравнения (15) запишем

$$\frac{d\alpha\,(\alpha\omega - g\tilde{\omega}_0)^2}{\alpha^2 \left\{ \left(\beta \frac{\tilde{\omega}^0}{\omega}\right)^2 (\alpha\omega - g\tilde{\omega}_0)^2 + \alpha^2\omega^2\mu_0^2 \right\}} = -\tilde{\varepsilon} d\psi\,. \tag{16}$$

Полагая $\tilde{\omega}_0 = 0$, получим случай движения частицы в чисто плоской волне.

В дальнейшем решение уравнения (16) существенно зависит от начальных данных. Если в начальный момент времени β и β_3 определены равенствами (7) и (8), интегрированием для переменной $x = \frac{1}{\alpha}$ получим

$$x - 2g\frac{\omega_0}{\omega} \ln(\omega_0^2 x^2 + \omega^2) = \tilde{\varepsilon}\mu_0^2\psi + x_0\,. \tag{17}$$

Для очень больших ψ влияние второго члена в левой части (17) несущественно. Переходя к переменной α, находим

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \tilde{\varepsilon}\alpha_0\mu_0^2\psi}. \tag{18}$$

Значение α, определяемое (18), в точности совпадает с полученным в [2] для случая движения электрона только в плоской волне.

Формула для энергии электрона в этом случае (при наличии однородного магнитного поля) существенно зависит от соотношения частот.

Если же электрон имел в начальный момент времени отличную от нуля скорость β_0 в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, то результаты будут другими. Ясно, что в этом случае, при $\beta \neq 0$, энергия электрона должна уменьшиться из-за синхротронного излучения, что в свою очередь приводит к тому, что поперечная скорость электрона будет стремиться к нулю. Далее процесс должен идти, как и в случае, рассмотренном выше.

Остановимся более подробно на случае, когда $\beta_0 \neq 0$. Изменение величины α существенно будет зависеть от соотношения двух параметров данной задачи $\eta = \frac{E_0}{H}$ и $\varphi = \frac{\widetilde{\omega}_0}{\omega}$, причем, если $\eta \gg 1$, $\varphi \gg 1$ и $\eta \gg 1$, $\varphi \ll 1$, выражение для α, полученное из формулы (16), совпадает с (18). Это и понятно, так как при выполнении этих условий влияние магнитного поля несущественно.

Если же $\eta \ll 1$, а $\varphi \gg 1$, то из (16) находим

$$\alpha \simeq \alpha_1 - 4\eta \frac{\sqrt{\alpha_1 - 1}}{(\alpha_1 + 1)^{3/2}}, \quad \alpha_1 = \frac{1 + c_0 e^{-2\widetilde{\varepsilon}\left(\frac{\widetilde{\omega}_0}{\omega}\right)^2 \psi}}{1 - c_0 e^{-2\widetilde{\varepsilon}\left(\frac{\widetilde{\omega}_0}{\omega}\right)^2 \psi}}; \qquad c_0 = \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0 + 1} \tag{19}$$

и для $\eta \ll 1$, $\frac{\widetilde{\omega}_0}{\omega} \ll 1$ получим также

$$\alpha \simeq \alpha_1 - 2\eta^2 \frac{(\alpha_1 - 1)}{(\alpha_1 + 1)} \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1 + 1}\right). \tag{20}$$

Во всех рассмотренных случаях, когда $\beta_0 \neq 0$, полученные формулы справедливы для промежутков времени таких, что выполняется неравенство $\alpha > 1$.

Найдем изменение средней энергии электрона с учетом затухания. Подставляя решения (20) в выражение для энергии и усредняя для больших времен по $T \gg T_\omega$ и $T \gg T_{\omega_0}$ ($H \sim 10^{10}$*э*, $T_{\omega_0} \sim 10^{-17}$ *сек*, $T_\omega \sim$ $\sim 10^{-12}$ *сек*), получим, что

$$\langle E \rangle = mc^2 \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} + \frac{mc^2}{2\alpha}\left[\gamma^2 + \beta^2\alpha^2 + \frac{\gamma^2}{\left(1 - g\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 2g\frac{\omega_0}{\omega}\frac{\gamma^2}{\left(1 - g\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right]. \tag{21}$$

В том случае, когда $\beta = 0$, с учетом (18) найдем

$$\langle E \rangle = \frac{mc^2}{2\alpha}\left[1 + \frac{2\gamma^2}{\left(1 - g\frac{\widetilde{\omega}_0}{\alpha\omega}\right)^2}\right], \qquad \alpha^{-1} \simeq \widetilde{\varepsilon}\gamma^2\psi \tag{22}$$

Выражение (22) совпадает со значением средней энергии электрона при движении в поле волны лишь при $\widetilde{\omega}_0 \ll \omega$. В случае, если $\widetilde{\omega}_0 \gg \omega$, магнитное поле замедляет рост энергии по сравнению с плоской волной. Естественно, что эти замечания справедливы вдали от резонанса.

Если начальные условия таковы, что $\beta_0 \neq 0$, то получим

$$\text{для} \quad \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \gg 1$$

$$< E > = mc^2 \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} + \frac{mc^2}{\alpha} 2\gamma^2, \tag{23}$$

$$\text{а для} \quad \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega} \ll 1$$

$$< E > = mc^2 \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} + \frac{mc^2}{\alpha} \gamma^2. \tag{24}$$

В формулах (23) и (24) α определяется выражениями (20) и (21), в зависимости от величины $\eta = E/H$.

Связь переменной ψ со временем найдем из очевидного соотношения

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{1 + \frac{1}{c} \frac{dz}{d\psi}}.$$

Для рассмотренных начальных условий при $\omega \gg \tilde{\omega}_0$ получим

$$\psi = \frac{\omega t}{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_0}}.$$

Если начальные условия таковы, что $\beta_0 \neq 0$, то при $\omega \gg \tilde{\omega}_0$ получим

$$\psi \left(1 + \frac{\gamma^2}{\alpha_0^2} \right) + \frac{\gamma^4 \tilde{\varepsilon} \psi^2}{\alpha_0} + \frac{\gamma^6 \tilde{\varepsilon}^2 \psi^3}{3} = \omega t \quad \text{при } \eta = E_0/H \gg 1$$

$$\text{и} \quad \psi = \frac{\omega t}{1+\gamma^2} \quad \text{при} \quad \eta = E_0/H \ll 1.$$

Таким образом, с течением времени (если электрон имел начальную скорость в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $\beta_0 \neq 0$) синхротронное излучение приводит к затуханию энергии электрона и $\beta_0 \to 0$. По истечении времени затухания β_0 система переходит в состояние, описываемое начальными условиями, когда $\beta_0 = 0$ и средняя энергия электрона начинает увеличиваться за счет действия электромагнитной волны.

Отметим, что рассматриваемый эффект увеличения средней энергии электрона обязан радиационному трению. Иначе говоря, радиационное трение индуцирует задержку фазы $\vec{u}_\perp$ таким образом, что $\vec{u}_\perp \vec{\mu}$ становится положительной, и создает постоянный компонент силы давления света. Этот механизм обсуждался в работах [2, 3 и 7].

Если в начальный момент времени $\omega_0 \leqslant \omega$, система проходит через резонанс, так как $\omega_0 = \frac{\omega_0}{\alpha}$ увеличивается с течением времени. Наше рассмотрение, таким образом, предполагает выполнение условия $\omega_0 > \omega$. Случай резонанса также можно включить в рассмотрение.

§ 3. Случай резонанса ($\omega_0 = g\omega_0$)

Решение уравнений движения (3) в этом случае можно получить в виде [4, 5]

$$u_x = -(\beta + \mu_0\psi)\cos\psi, \quad u_y = -(\beta + \mu_0\psi)\sin\psi, \tag{25}$$

$$u_z = u_{z0} + \frac{\mu_0}{\alpha}\left(\beta\psi + \frac{\mu_0\psi^2}{2}\right).$$

Здесь константы β, u_{z0} и γ характеризуют поперечную, продольную скорости и энергию электрона соответственно в начальный момент времени.

Поступая аналогичным образом, как и в § 2, для $d\alpha/d\psi$ находим

$$\frac{d\alpha}{d\psi} = -\tilde{\varepsilon}\alpha^2\left[(\beta + \mu_0\psi)^2 + \mu_0\right]^2. \tag{26}$$

Интегрируя (26), получим

$$\frac{d\alpha}{d\psi} = \frac{\alpha_0}{1 + \tilde{\varepsilon}\alpha_0\left[\left(\beta^2\psi + \beta\mu_0\psi^2 + \frac{\mu_0^2\psi^3}{3}\right) + \mu_0^2\psi\right]}. \tag{27}$$

Разумеется, что формулы (25), (26), (27) справедливы лишь приближенно, так как с учетом затухания условие резонанса нарушается.

Авторы признательны проф. И. М. Тернову за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, 46, 776, 1964.
2. Gunn J. E., Ostriker J. P. California inst. of Technology Preprint.
3. Халилов В. Р., Холомай Б. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 12, № 3, 1972.
4. Redmond P. J. J. Math. Phys., 6, 1163, 1965.
5. Коломенский А. А. ЖЭТФ, 44, 261, 1963.
6. Багров В. Г., Халилов В. Р. «Изв. вузов», 2, 37, 1968.
7. Коломенский А. А., Воронин В. С. ЖЭТФ, 47, 1258, 1964.

Поступила в редакцию
19.4 1971 г.

Кафедра
теоретической физики