

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1972

УДК 551.465.11

В. В. АЛЕКСЕЕВ, В. М. БЛИНКОВ

## КОНВЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ВЫТЯНУТОЙ ПОЛОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ

Исследуется зависимость критических чисел Грассхофа от длины двумерного прямоугольного бассейна, подогреваемого снизу. Показано, что с ростом длины бассейна нижнее критическое число стремится к некоторому положительному пределу, а критические числа, соответствующие вторичным течениям, асимптотически возрастают пропорционально четвертой степени номера решения.

Известно, что Мировой океан в силу большой теплоемкости воды выступает как накопитель тепловой энергии, атмосфера же — в качестве активной динамической среды. Упрощенной математической моделью такой системы является задача о взаимодействии двух несмешивающихся жидкостей в замкнутом бассейне. Причем наиболее интересен случай сильно вытянутого бассейна. Если осуществлять подогрев по линии раздела, то, как и в реальной системе, первоначальные конвективные движения возникнут в более легкой жидкости, подогреваемой снизу. Движения легкой жидкости далее индуцируют течения в более тяжелом слое. Поэтому первым этапом исследований является задача об конвекции в бассейне, подогреваемом снизу в зависимости от длины бассейна.

Линейная стационарная задача для бесконечно вытянутого бассейна была впервые исследована Реллеем [1]. В последнее время рядом авторов на ЭВМ решалась двумерная нелинейная стационарная задача о конвекции для отношения длины бассейна к высоте (1:1—3:1) [2—5]. Мы приводим решение стационарной задачи для бассейна произвольной вытянутости.

Процесс конвективного движения в жидкости описывается следующей системой термогидродинамических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T &= \chi \Delta T, \quad \rho = \rho(P, T), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\vec{v}$  — скорость,  $T$  — температура,  $\vec{g}$  — ускорение силы тяжести,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — вязкость,  $P$  — давление,  $\chi$  — температуропроводность жидкости.

Мы будем исследовать двумерную задачу, поэтому компоненты скорости удобно выразить через потенциал:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Записывая уравнения (1) в приближении Буссинеска для потенциала  $\psi$  и температуры  $T$  и переходя к безразмерным единицам, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) &= \Delta \Delta \psi - G \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{1}{P} \Delta T, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $G = \frac{g\beta\theta a^3}{\nu^2}$  — число Грассхофа,  $P = \frac{\nu}{\chi}$  — число Прандтля,  $\theta$  — разность температур между верхней и нижней границей бассейна,  $\beta$  — коэффициент объемного расширения жидкости,  $a$  — высота бассейна.

Бассейн, который мы рассматриваем, имеет прямоугольную форму и отношение длины к высоте равно  $l$ . В безразмерных единицах высота равна 1, а длина  $l$ . На границе бассейна температура фиксирована, а для  $\psi$  записываем условия эквивалентные условиям прилипания для тангенциальных составляющих скорости и непротекания для нормальных составляющих. Таким образом, для  $T$  и  $\psi$  имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ T = 0 \end{aligned} \right\}_{y=-\frac{1}{2}}, \quad \left. \begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ T = 1 \end{aligned} \right\}_{y=\frac{1}{2}}, \quad \left. \begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ T = \frac{1}{2} - y \end{aligned} \right\}_{x=-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}}. \quad (4)$$

Решения системы (3) ищем в следующем приближенном виде, желая определить грубую картину разбиения жидкости на конвекционные ячейки:

$$T = \frac{1}{2} - y + A\alpha(x)\beta(y); \quad \psi = B\psi(x)\psi(y). \quad (5)$$

Подставив (5) в (3) и проинтегрировав по  $y$  в пределах  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , получим с учетом граничных условий систему уравнений для  $\psi(x)$  и  $\beta(y)$ . Затем интегрируем систему (3) по  $x$  в пределах  $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$  и получаем приближенные уравнения для  $\psi$  и  $\alpha$ . При желании можно улучшить точность получаемого приближения, разбивая область, занятую жидкостью на более мелкие участки, где  $T(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  аппроксимируются выражениями (5). Однако в этой статье мы ограничимся нулевым приближением. (Далее будет показано, что уже в этом приближении имеется удовлетворительное согласие с решениями уравнений (3), полученными разностными методами [3].) Итак, для  $\psi(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\psi(y)$ ,  $\beta(y)$  имеем уравнения

$$\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi(y) dy + \varphi(x) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d^4\psi(y)}{dy^4} dy = G \frac{d\alpha(x)}{dx} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta(y) dy, \quad (6)$$

$$\frac{d^4\psi(y)}{dy^4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{l}{2}} \varphi(x) dx + \psi(y) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} dx = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x)\alpha(x)}{dx} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta(y) \frac{d\psi(y)}{dy} dy &= \frac{d^2\alpha(x)}{dx^2} \frac{1}{P} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta(y) dy + \\ &+ \frac{1}{P} \alpha(x) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d^2\beta(y)}{dy^2} dy - \frac{d\varphi(x)}{dx} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi(y) dy, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(y)\beta(y)}{dy} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \varphi(x) \frac{d\alpha(x)}{dx} dx &= \frac{1}{p} \beta(y) \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d^2\alpha(x)}{dx^2} dx + \\ &+ \frac{1}{P} \frac{d^2\beta(y)}{dy^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d(x) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Сделаем, наконец, последнее приближение. Положим нелинейные члены в уравнениях (8) и (9) равными 0. Однако в этом случае величины  $A\alpha(x)\beta(y)$  и  $B\varphi(x)\psi(y)$  могут быть определены только с точностью до постоянных нормировочных коэффициентов  $A$  и  $B$ . Чтобы определить эти величины, достаточно построить положительно-определенный функционал:

$$\begin{aligned} S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx dy \left\{ \left[ \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \Delta\Delta\psi + G \frac{\partial T}{\partial x} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{P} \Delta T \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

минимизируя который легко получить уравнения для  $A$  и  $B$ . Для этого достаточно подставить в  $S$  значения  $\psi(x, y)$  и  $T(x, y)$  из (5), тогда получим

$$S = a_1 B^4 + a_2 B^2 + a_3 A^2 + a_4 A^2 B^2 + a_5 AB,$$

где  $a_i$  — постоянные числа. Условие  $\delta S(A, B) = 0$  дает систему уравнений для  $A$  и  $B$ . Таким образом учитывается нелинейный характер уравнений.

Введем обозначения

$$\lambda = - \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \varphi(x) dx}; \quad k = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d^2 \alpha(x)}{dx^2} dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \alpha(x) dx}; \quad (10)$$

$$A = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi(y) dy}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta(y) dy}. \quad (11)$$

Получаем окончательно систему уравнений:

$$\frac{d^4 \psi(y)}{dy^4} - \lambda \psi(y) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \beta(y)}{dy^2} + k \beta(y) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \alpha(x)}{dx^2} - k \alpha(x) = PA \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad (14)$$

$$\frac{d^4 \psi(x)}{dx^4} + \lambda \varphi(x) = \frac{G}{A} \frac{d\alpha(x)}{dx}. \quad (15)$$

Граничные условия (4) перейдут в

$$\beta(y) = 0 \Big|_{y=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}; \quad \psi(y) = \frac{d\psi(y)}{dy} = 0 \Big|_{y=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}; \quad (16)$$

$$\alpha(x) = 0 \Big|_{x=-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}}; \quad \varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0 \Big|_{x=-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}}.$$

Приступим к решению системы уравнений (12)–(15). В уравнении (12)  $\lambda$  может быть как меньше, так и больше 0. Когда  $\lambda < 0$  (12) можно представить в виде

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - i \sqrt{-\lambda} \right) \left( \frac{d^2}{dy^2} + i \sqrt{-\lambda} \right) \psi(y) = 0,$$

откуда следует, что общее решение уравнения может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \psi(y) = & A \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-\lambda} y\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-\lambda} y\right) + \\ & + B \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-\lambda} y\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-\lambda} y\right) + \\ & + C \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-\lambda} y\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-\lambda} y\right) + \\ & + D \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-\lambda} y\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-\lambda} y\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Из граничных условий для  $\psi$  получаем

$$\begin{aligned} C = & -D \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right); \\ A = & -B \operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

а из равенства нулю производных  $\frac{d\psi}{dy}$  на границе области имеем

$$\begin{aligned} c = & D \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) + 1}{-\operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) + 1}, \\ A = & B \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt[4]{-\lambda}\right) + 1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Приравнивая правые части первых уравнений системы (18)–(19), получаем

$$\frac{\operatorname{ctg} Z \operatorname{th} Z + 1}{-\operatorname{ctg} Z \operatorname{th} Z + 1} = -\operatorname{tg} Z \operatorname{th} Z, \text{ где } Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-\lambda}. \quad (20)$$

После несложных преобразований получаем уравнение  $-\sin 2Z = \operatorname{sh} 2Z$ , которое имеет только тривиальное решение.

Аналогично из вторых уравнений (18)–(19) получаем

$$\frac{\operatorname{tg} Z \operatorname{th} Z - 1}{\operatorname{tg} Z \operatorname{th} Z + 1} = \operatorname{ctg} Z \operatorname{th} Z, \text{ откуда } \sin 2Z = \operatorname{sh} 2Z.$$

Таким образом, при  $\lambda < 0$  и граничных условиях (16) имеется только нулевое решение уравнения (12).

Если же  $\lambda > 0$ , то уравнение (12) можно записать в виде

$$\left(\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + V\bar{\lambda}\psi(y)\right) \left(\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} - V\bar{\lambda}\psi(y)\right) = 0.$$

Поэтому общее решение равно

$$\psi(y) = A \sin \sqrt[4]{\lambda} y + B \cos \sqrt[4]{\lambda} y + C \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} y + D \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} y.$$

Из граничных условий получаем

$$A \sin Z + B \cos Z + C \operatorname{sh} Z + D \operatorname{ch} Z = 0,$$

$$\begin{aligned} -A \sin Z + B \cos Z - C \operatorname{sh} Z + D \operatorname{ch} Z &= 0, \\ A \cos Z - B \sin Z + C \operatorname{ch} Z + D \operatorname{sh} Z &= 0, \\ A \cos Z + B \sin Z + C \operatorname{ch} Z - D \operatorname{sh} Z &= 0, \end{aligned}$$

$$Z = \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{2}.$$

Сложив и вычтя первое и второе, а затем третье и четвертое уравнения этой системы, будем иметь

$$\begin{aligned} B \cos Z + D \operatorname{ch} Z &= 0, & A \sin Z + C \operatorname{sh} Z &= 0, \\ B \sin Z - D \operatorname{sh} Z &= 0, & A \cos Z + C \operatorname{ch} Z &= 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что для того чтобы  $B, D \neq 0$ , необходимо

$$\operatorname{tg} Z = -\operatorname{th} Z.$$

$A$  и  $C$  будут отличны от нуля, если  $\operatorname{tg} z = \operatorname{th} z$ .

За исключением тривиального случая, решения двух полученных трансцендентных уравнений не совпадают. Поэтому возможны два класса решений:

$$1. \psi(y) = B \left( \operatorname{ch} \frac{\sqrt[4]{\lambda} y}{2} \cos \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{2} - \operatorname{ch} \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{2} \cos \frac{\sqrt[4]{\lambda} y}{2} \right), \operatorname{tg} Z = -\operatorname{th} Z; \quad (21)$$

$$2. \psi(y) = A \left( \operatorname{sh} \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{2} \sin \frac{\sqrt[4]{\lambda} y}{2} - \operatorname{sh} \frac{\sqrt[4]{\lambda} y}{2} \sin \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{2} \right), \operatorname{tg} Z = \operatorname{th} Z. \quad (22)$$

Аналогично для уравнения (13) получаем тоже два класса решений:

$$1. \beta(y) = A \sin 2\pi m y, \text{ когда } k = (2m\pi)^2; \quad (23)$$

$$2. \beta(y) = B \cos (2\pi m + \pi) y, \text{ когда } k = (2m + 1)^2 \pi^2, \quad (24)$$

где  $m$  — целое число.

Чтобы решить систему уравнений (14)–(15), продифференцируем (15) по  $x$  и далее подставим в полученное решение выражение  $\frac{d\varphi}{dx}$  из (14), в результате получим:

$$\frac{d^6 \alpha(x)}{dx^6} - k \frac{d^4 \alpha(x)}{dx^4} - (-\lambda + GP) \frac{d^2 \alpha(x)}{dx^2} - \lambda k \alpha(x) = 0. \quad (25)$$

Граничные условия для этого уравнения нетрудно получить из (16):

$$\alpha(x) \left| \begin{array}{l} \frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} \end{array} \right. = 0; \quad \frac{d^2 \alpha(x)}{dx^2} \left| \begin{array}{l} \frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} \end{array} \right. = 0; \quad \frac{d\alpha(x)}{dx} - k \int \alpha(x) \alpha x \left| \begin{array}{l} \frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} \end{array} \right. = 0. \quad (26)$$

Искать решение уравнения (26) мы будем в виде:  $\alpha(x) = e^{p x}$ . Подставляя это выражение в (25) и вводя обозначение  $p^2 = Z$ , запишем:

$$Z^3 - kZ^2 - (-\lambda + GP)Z - \lambda k = 0 \quad (27)$$

ИЛИ

$$Z'^3 = \left( Z' + \frac{-\lambda' + GP'}{2} \right)^2 + \lambda' - \frac{(-\lambda' + GP')^2}{4},$$

где

$$Z = Z'k; \lambda' = \frac{\lambda}{k^2}; GP' = \frac{GP}{k^2}. \quad (28)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой параболу в плоскости  $Z', Z'^2$  с координатами вершины

$$x_0 = -\frac{-\lambda' + GP'}{2},$$

$$y_0 = -\frac{(-\lambda' + GP')^2}{4} + \lambda'.$$

Вершина  $(x_0, y_0)$  передвигается по параболе  $y_0 = -x_0^2 + \lambda'$ , причем, так как  $GP' > 0$ ,  $x_0 < \frac{\lambda'}{2}$  (см. рис. 1),  $\lambda'$  меняется в очень узких пределах, если учесть, что периодичности функции тока и температуры по оси  $y$  должны быть согласованы, т. е. определенному  $\lambda$  соответствует определенное  $k$ .

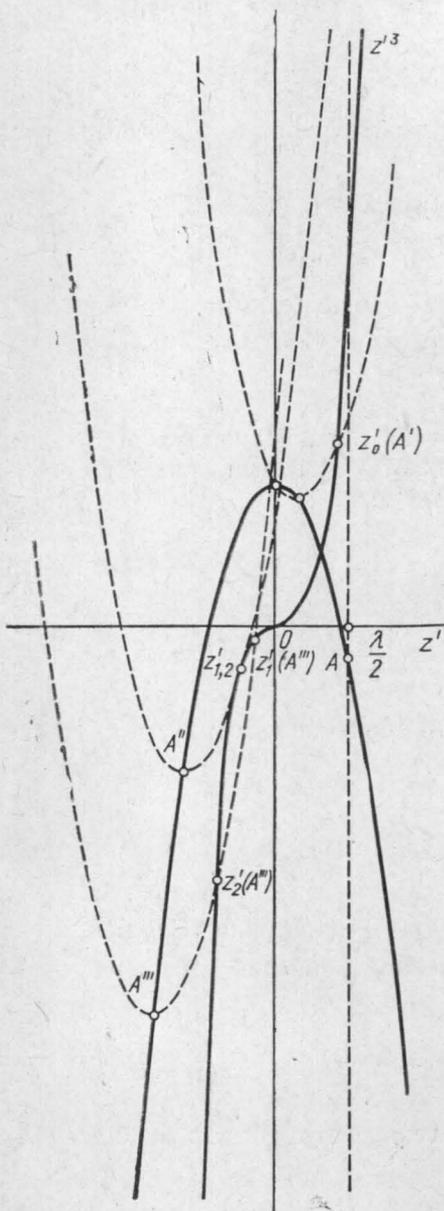


Рис. 1

В результате для  $\lambda'$  имеем

$$\lambda'_1 \simeq 5 \cdot 13; \lambda'_2 \simeq 2 \cdot 43; \lambda'_3 \simeq 1 \cdot 85, \dots, \lambda'_{n \geq 4} \simeq \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^4. \quad (29)$$

Из рисунка 1 видно, что когда вершина параболы  $Z'^2$  находится между точками  $A$  и  $A''$ , то имеется только один вещественный положительный корень  $y$  уравнения (27). Когда же параболы  $Z'^2$ , двигаясь от  $A$  к  $A''$

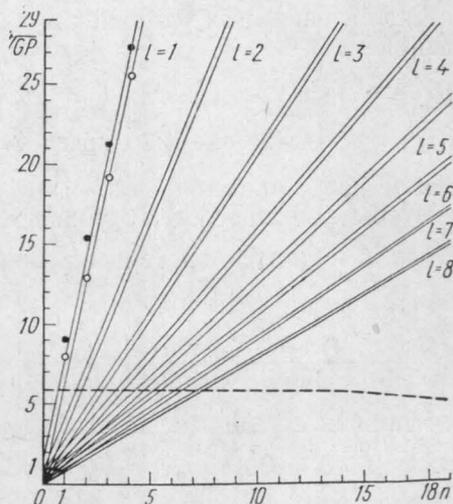


Рис. 2

пройдет некоторую критическую точку  $A''$ , все корни уравнения (27) становятся вещественными (один из них положительный, а другие два отрицательные). Для уравнения на прямую 1 (рис. 1) нанесены значения корней уравнений (32) и (33) (кружки) ( $k = \pi^2$ ). Обозначим положительный корень через  $Z'_0$ . Нетрудно выразить через него другие два корня ( $Z'_1, Z'_2$ ). Для этого представим уравнение (27) в виде

$$\begin{aligned} Z'^3 - Z'^2 - (-\lambda' + GP')Z' - \lambda' &= (Z' - Z'_0)(Z'^2 + \alpha Z' + \beta) = \\ &= Z'^3 + (\alpha - Z'_0)Z'^2 + (\beta - Z'_0\alpha)Z' - Z'_0\beta. \end{aligned}$$

Отсюда получаем  $\alpha - Z'_0 = 1$ ;  $-\lambda' = -Z'_0\beta$ , или  $\alpha = Z'_0 - 1$ ;  $\beta = \frac{\lambda'}{Z'_0}$ .

(Третье уравнение  $\beta - Z'_0\alpha = -(-\lambda' + GP')$  дает нам выражение  $GP'$  через  $Z'_0$ .) Таким образом, для нахождения  $Z'_1, Z'_2$  имеем

$$Z'_{1,2} = \frac{-Z'_0 + 1}{2} \pm \frac{\sqrt{(Z'_0 - 1)^2 - \frac{4\lambda'}{Z'_0}}}{2}. \quad (30)$$

Условие  $GP' > 0$  дает  $Z'_0 > 1$ .

Из решения (30) следует, что, если  $(Z'_0 - 1)^2 - \frac{4\lambda'}{Z'_0} < 0$ , то  $Z'_{1,2}$  комплексные. Если же  $(Z'_0 - 1)^2 - \frac{4\lambda'}{Z'_0} \geq 0$ , то корни вещественные. Критическое значение  $Z'_0$  определяется из уравнения

$$Z'_0(Z'_0 - 1)^2 = 4\lambda'.$$

Различным  $\lambda'$  соответствуют различные критические  $Z'_0$ :

$$Z'_0(\lambda'_1) \cong 3,46; \quad Z'_0(\lambda'_2) \cong 2,84; \quad \dots \quad Z'_0(\lambda'_\infty) \cong 2,32.$$

Итак возможны два случая: а)  $Z'_0$  — вещественное, а  $Z'_{1,2}$  — комплексные сопряженные числа, б) все три корня вещественные, из них один положительный и два отрицательных.

Случай а) аналогичен отрицательному  $\lambda$  в уравнении (12) и характеризуется отсутствием корней.

В случае б) общее решение может быть записано в виде

$$\alpha(x) = A \sin p_1 x + B \cos p_1 x + C \sin p_2 x + D \cos p_2 x + E \operatorname{sh} p_3 x + F \operatorname{ch} p_3 x, \quad (31)$$

где  $p_3 = \sqrt{kZ'_0}$ ,  $p_{1,2} = \sqrt{-kZ'_{1,2}}$ .

Аналогично уравнению (12) и здесь оказываются возможными два случая. Когда  $B, D, F$  отличны от нуля, граничные условия требуют выполнения уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{p_1 l}{2} \right) \frac{(p_1^2 + k)(p_2^2 + p_3^2)}{p_1} - \operatorname{tg} \left( \frac{p_2 l}{2} \right) \frac{(p_2^2 + k)(p_3^2 + p_1^2)}{p_2} + \\ + \operatorname{th} \left( \frac{p_3 l}{2} \right) \frac{(p_3^2 - k)(p_2^2 - p_1^2)}{p_3} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Когда же  $A, C, E$  не равны нулю, необходимо, чтобы

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{p_1 l}{2}\right) \frac{(p_1^2 + k)(p_3^2 + p_2^2)}{p_1} - \operatorname{ctg}\left(\frac{p_2 l}{2}\right) \frac{(p_2^2 + k)(p_1^2 + p_3^2)}{p_2} - \\ - \operatorname{cth}\left(\frac{p_3 l}{2}\right) \frac{(p_3^2 - k)(p_2^2 - p_1^2)}{p_3} = 0. \quad (33)$$

Если обозначить наименьший по величине отрицательный корень  $Z'$  через  $a'$ , то число Грассхофа выражается через  $a'$  и  $\lambda'$ :

$$GP = k^2 \left( \lambda' + a' + a'^2 + \frac{\lambda'}{a'} \right),$$

и если  $(a' + 1)^2 a' \gg 4\lambda'$  и  $a' \gg 1$  (что эквивалентно  $a' \gg 3$ ), то для определения корней получаем простые асимптотические уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{k} l \sqrt{a'}}{2}\right) = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{l \sqrt{k} \sqrt{\lambda'}}{2a'}\right) \frac{2\sqrt{a'}}{\sqrt{\lambda'}}, \quad (34)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{k} l \sqrt{a'}}{2}\right) = -1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{l \sqrt{k} \sqrt{\lambda'}}{2a'}\right) \frac{2\sqrt{a'}}{\sqrt{\lambda'}}. \quad (35)$$

При  $a' \gg \frac{l \sqrt{k} \sqrt{\lambda'}}{2}$  имеем для (34)  $a' = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^2}{l^2 \cdot k}$ , что дает при конкретных  $k, l$  возрастание критического числа Грассхофа пропорционально четвертой степени его номера:

$$GP \cong \frac{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^4}{l^4}; \text{ если } \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 \gg l^3 k \sqrt{k}.$$

В свою очередь из (35) следует

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{k} l \sqrt{a'}}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{l \sqrt{k} \sqrt{\lambda'}}{2a}\right) \frac{2\sqrt{a'}}{\sqrt{\lambda'}} \rightarrow \infty,$$

т. е.  $\frac{\sqrt{k} l \sqrt{a'}}{2}$  при больших  $a'$  стремится к  $n\pi$ . Откуда

$$a' = (2n\pi)^2 / (l^2 k).$$

Поэтому  $GP \cong \left(\frac{2n\pi}{l}\right)^4$ , когда  $a' \gg \frac{l \sqrt{k} \sqrt{\lambda'}}{2}$  или  $(2n\pi)^2 \gg l^3 k \sqrt{k}$ .

Такое асимптотическое поведение чисел Грассхофа удобно представить графически (см. рис. 2). Пары рядом лежащих прямых представляют собой места, где располагаются при  $(2n\pi)^2 \gg l^3 k \sqrt{k}$  точки, абсциссами которых являются номера решений (1, 2, 3...), а ординаты  $\sqrt[4]{GP}$ . В качестве примера на рисунок нанесены решения уравнений (32) (точки) и (33) (кружочки) для  $l=1$  и  $k=\pi^2$ .

Из рисунка видно, что точки  $(n, \sqrt[4]{GP})$  довольно быстро стремятся к своему асимптотическому положению (уже при  $n=4$  для  $l=1$  и  $k=\pi^2$  асимптотические формулы выполняются достаточно хорошо). Как видим, асимптотические положения чисел Грассхофа не зависят от  $k$ . Это говорит о том, что вокруг этих асимптотических значений, вообще

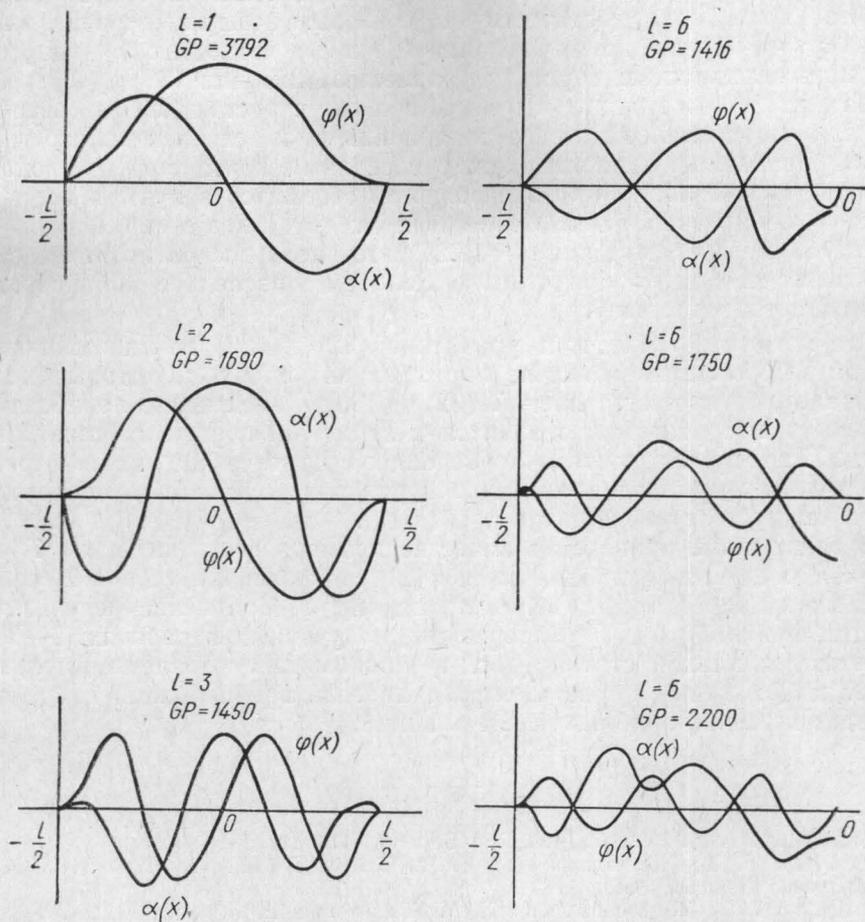


Рис. 3

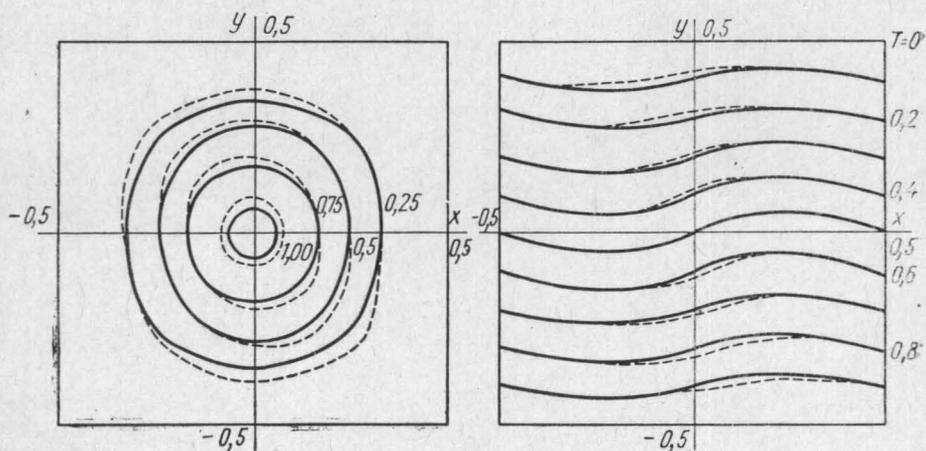


Рис. 4

говоря, группируются целые семейства точек, причем наиболее удаленными являются корни, соответствующие первым номерам корней в каждой из групп, определяемых значениями  $l$  и  $k$  и четностью функций  $\alpha_1\varphi$  (т. е. принадлежностью корней к уравнению (32) или (33)).

Из рис. 2 также видно, что пары прямых с ростом длины бассейна оказываются все менее и менее наклоненными к оси абсцисс, что говорит об уменьшении разности между соседними критическими числами разных порядков. При  $l \rightarrow \infty$  эта разность стремится к нулю и все критические числа оказываются равными друг другу например, при  $k = \pi^2$ ,  $GP \approx 1176$ , что соответствует  $a' = 1,225$  (это число несколько отличается от критического числа полученного Реллеем, последнее объясняется ошибкой метода расчета).

Так как  $\sqrt{k}$  и  $l$  входят в уравнение (32) и (33) почти одинаковым образом (единственное отличие в разных значениях  $\lambda'$ , которые меняются мало), то корни уравнений (32) и (33), наименьшие по абсолютной величине, с ростом  $k$  стремятся к ограничивающим их снизу значениям. Поэтому при достаточно больших  $k$  критические числа, определяющие число дроблений ячеек по вертикали, возрастают пропорционально четвертой степени числа дроблений.

В заключение приведем в качестве примера функции  $\psi$  и  $T$  для  $l = 1-6$ . Поведение функций  $\alpha(x)$  и  $\varphi(x)$  для различных длин бассейна и разных критических  $GP$  показано на рис. 3. Сравнение результатов расчетов функций тока и температуры, полученных в работах [2-3], с результатами данной статьи (рис. 4) показывает удовлетворительное их согласие и таким образом справедливость предположений, сделанных для получения приближенных решений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rellew A., Southwell R. Pros. Roy. Soc., (A) 176, 312, 1940.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. «Изв. АН СССР», геофизика, № 5, 56, 1966.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. «Изв. АН СССР», геофизика, № 6, 93, 1966.
4. Полежаев В. И. «Изв. АН СССР», геофизика, № 5, 124, 1968.
5. Блохин А. С., Блохина Н. С. ДАН, СССР, 193, № 4, 805, 1970.

Поступила в редакцию  
24.5 1971 г.

Кафедра  
физики моря и вод суши