

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1963 г.

К. В. КЛУБОВИЧ

ОБРАЗОВАНИЕ ОБЛАКОВ В ОДНОРОДНОЙ ВОЗДУШНОЙ МАССЕ

Рассматривается вопрос об изменении температуры и влажности при вертикальных движениях и конденсации водяного пара, приводящих к образованию облаков. Учитывается диффузия водяного пара и турбулентная теплопроводность воздуха.

В данной статье решается вопрос образования облачности и изменения влажности температуры по вертикали в однородной воздушной массе под действием турбулентности и восходящих токов с учетом теплоты конденсации водяного пара. Подобные задачи, но в другой постановке решались А. Ф. Дюбуком [1], М. Е. Швецом [2], Л. Р. Арраго [3], Л. Т. Матвеевым и В. С. Кожариным [4] и другими.

Исходными уравнениями являются: уравнение переноса водяного пара, уравнение переноса тепла и уравнение переноса водности облака. Запишем эти уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= D \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - c(a - \bar{a}) + a \frac{d \ln \rho}{dt}, \\ \frac{dT}{dt} &= D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Lc(a - \bar{a}) + \frac{A}{c_p \rho} \frac{d\rho}{dt}, \\ \frac{dq}{dt} &= D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + c(a - \bar{a}) + \omega_g \frac{dq}{dz},\end{aligned}\tag{1}$$

где a — абсолютная влажность, T — температура, q — водность облака, $\bar{a}$ — абсолютная влажность насыщения над плоской поверхностью чистой воды, ρ — плотность атмосферы, p — давление атмосферы, A — термический эквивалент работы, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, ω — скорость восходящих токов, ω_g — средняя скорость выпадения осадков из облака, D — коэффициент турбулентности, z — вертикальная координата, t — время, ε — удельная теплота конденсации водяного пара, $\bar{\rho}$ — средняя плотность атмосферы для рассматриваемого слоя, $L = \frac{\varepsilon}{c_p \rho}$.

Член $a \frac{d \ln \rho}{dt}$ — характеризует изменение абсолютной влажности при изменении плотности воздуха, а член $\frac{A}{c_p \rho} \frac{dp}{dt}$ характеризует изменение температуры, когда изменяется давление воздуха. Член $w_g \frac{\partial q}{\partial z}$ показывает количество осадков, выпадающее в единицу времени из единицы объема облака. Член $c(a - \bar{a})$ представляет среднюю скорость конденсации водяного пара, т. е. количество сконденсированной воды в единице объема за единицу времени. Этот член получается из следующих соображений. В работе [5] показано, что скорость конденсационного роста капли радиуса r равна

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r D^* (a - \bar{a}_0),$$

где m — масса капли, r — радиус капли, D^* — коэффициент диффузии водяного пара, $\bar{a}_0$ — абсолютная влажность насыщения у поверхности капли, зависящая от радиуса капли и концентрации примесей. Но в данной задаче считаем, что $\bar{a}_0 = \bar{a}$, т. е. пренебрегаем зависимостью $\bar{a}_0$ от радиуса капли и концентрации примесей. Если взять средний радиус и среднее число капель в единице объема за рассматриваемый промежуток времени, то получим

$$n \frac{dm}{dt} = 4\pi \bar{r} D^* (a - \bar{a}) n,$$

где n — среднее число капель в единице объема, $\bar{r}$ — средний радиус капель. Введем обозначение $c = 4\pi \bar{r} n D^*$, тогда член $c(a - \bar{a})$ представляет собой среднюю скорость конденсации водяного пара за рассматриваемый промежуток времени образования облака.

Для однородной воздушной массы можем принять, что

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Тогда система уравнений (1) запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + w \frac{\partial a}{\partial z} &= D \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - c(a - \bar{a}) + \frac{a d \ln \rho}{dt}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Lc(a - \bar{a}) + \frac{A}{c_p \rho} \frac{dp}{dt}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + w \frac{\partial q}{\partial z} &= D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + c(a - \bar{a}) + w_g \frac{\partial q}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1')$$

В однородной воздушной массе можно считать, что плотность и давление атмосферы не зависят от времени, и тогда

$$\frac{A dp}{c_p \rho dt} = \frac{A \partial p}{c_p \rho \partial z} w = -\gamma_a w$$

и

$$a \frac{d \ln \rho}{dt} = a \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} w.$$

Усреднив выражение $a \frac{\partial \ln \rho}{\partial z}$ и обозначив его через $-k_0$, получим

$$a \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} = \bar{a} \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} = -k_0.$$

Будем считать, что $\omega = \omega_q$, тогда система уравнений (1') примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \omega \frac{\partial a}{\partial z} &= D \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - c(a - \bar{a}) - k_0 \omega, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial z} &= D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Lc(a - \bar{a}) - \gamma_a \omega, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + c(a - \bar{a}). \end{aligned} \quad (2)$$

К системе уравнений (2) запишем начальные и граничные условия в общем виде

$$\begin{aligned} a|_{t=0} &= \varphi_1(z), \quad T|_{t=0} = \varphi_2(z), \quad q|_{t=0} = \varphi_3(z), \\ a|_{z=0} &= f_1(t), \quad T|_{z=0} = f_2(t), \quad q|_{z=0} = f_3(t), \\ \frac{da}{dz}|_{z=H} &= \omega_1(t), \quad \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=H} = \omega_2(t), \quad \frac{\partial q}{\partial z}|_{z=H} = \omega_3(t). \end{aligned} \quad (2')$$

Ищем решение системы уравнений (2) при начальных и граничных условиях (2') следующим образом. Умножив первое уравнение системы (2) на L и сложив его со вторым, получим

$$\frac{\partial (T + La)}{\partial t} + \omega \frac{\partial (T + La)}{\partial z} = D \frac{\partial^2 (T + La)}{\partial z^2} - (\gamma_a + Lk_0) \omega. \quad (3)$$

Обозначим $T + La = P$; $(\gamma_a + Lk_0) \omega = b$ и уравнение (3) запишется

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \omega \frac{\partial P}{\partial z} = D \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - b, \quad (3a)$$

а начальные и граничные условия к уравнению (3a) примут вид:

$$\begin{aligned} P|_{t=0} &= \varphi_2(z) + L\varphi_1(z), \\ P|_{z=0} &= f_2(t) + Lf_1(t), \\ \frac{\partial P}{\partial z}|_{z=H} &= \omega_2(t) + L\omega_1(t). \end{aligned} \quad (3')$$

Подстановка $P = \bar{v} e^{\delta z - \nu t} - bt$ приводит уравнение (3a) к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}, \quad (4)$$

где

$$\delta = \frac{\omega}{2D}, \quad \nu = \frac{\omega^2}{4D},$$

а начальные и граничные условия к виду

$$\bar{v}|_{t=0} = \bar{\varphi}(z), \quad \bar{v}|_{z=0} = \bar{f}(t), \quad (4')$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \delta \bar{v} \right)_{|z=H} = \bar{\omega}(t),$$

где

$$\bar{\varphi}(z) = [\varphi_1(z) + L\varphi_1(z)]e^{-\delta z},$$

$$\bar{f}(t) = [f_2(t) + Lf_1(t) + Bt]e^{\nu t},$$

$$\bar{\omega}(t) = [\omega_2(t) + L\omega_1(t)]e^{-\delta H + \nu t}.$$

Подстановка $\bar{v} = v + \bar{f}(t) + z \frac{\bar{\omega}(t) - \delta \bar{f}(t)}{1 + \delta H}$ приводит граничные условия к однородным, а уравнение (4) к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} - D \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = f(z, t), \quad (5)$$

где

$$f(z, t) = -\bar{f}'(t) - z \frac{\bar{\omega}'(t) - \delta \bar{f}'(t)}{1 + \delta H}.$$

Начальные и граничные условия к уравнению (5) будут

$$v|_{t=0} = \varphi^*(z), \quad v|_{z=0} = 0, \quad (5')$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \delta v \right)_{|z=H} = 0,$$

где

$$\varphi^*(z) = \bar{\varphi}(z) - \bar{f}(0) - z \frac{\bar{\omega}(0) - \delta \bar{f}(0)}{1 + \delta H}.$$

Ищем решение уравнения (5) в виде суммы двух функций $v = v_1 + v_2$, где v_1 удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$v_1|_{t=0} = \varphi^*(z), \quad v_1|_{z=0} = 0, \quad (6')$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \delta v_1 \right)_{|z=H} = 0,$$

а v_2 удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - D \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = f(z, t) \quad (7)$$

и однородным начальным и граничным условиям

$$v_2|_{t=0} = 0, \quad v_2|_{z=0} = 0, \quad (7')$$

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \delta v_2 \right)_{|z=H} = 0.$$

Ищем решение уравнения (6) методом Фурье $v_1 = T(t)Z(z)$.

Получим

$$v_1 = e^{-D\lambda^2 t} (A \cos \lambda z + B \sin \lambda z).$$

Из граничного условия следует, что $A=0$ и частное решение имеет вид

$$v_1 = Be^{-D\lambda_i^2 t} \sin \lambda_i z.$$

Из условия $\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \delta v_1\right)_{|z=H} = 0$ получим $\operatorname{tg} \lambda_i H = -\frac{\lambda_i}{\delta}$,

где λ_i — корни уравнения.

Решение уравнения (6) имеет вид

$$v_1 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e^{-D\lambda_i^2 t} \sin \lambda_i z,$$

где b_i — коэффициенты Фурье.

Из начальных условий (6) получим

$$b_i = \frac{4\lambda_i}{2H\lambda_i - \sin 2\lambda_i H} \int_0^H \left[\bar{\varphi}(z) - \bar{f}(0) - z \frac{\bar{\omega}(0) - \delta \bar{f}(0)}{1 + \delta H} \right] \sin \lambda_i z \, dz.$$

Решение уравнения (7) ищем в виде ряда Фурье

$$v_2 = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t) \sin \lambda_i z, \quad (7a)$$

где $\sin \lambda_i z$ — собственные функции уравнения $Z'' + \lambda^2 Z = 0$. Для определения $v_i(t)$ разложим правую часть уравнений (7) в ряд Фурье по собственным функциям

$$f(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \sin \lambda_i z, \quad (7b)$$

где $a_i(t)$ — коэффициенты Фурье.

Подставив выражения (7a) и (7b) в уравнение (7), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} [v_i'(t) + D\lambda_i^2 v_i(t)] \sin \lambda_i z = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \sin \lambda_i z.$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin \lambda_i z$, получим линейное уравнение

$$v_i'(t) + D\lambda_i^2 v_i(t) = a_i(t). \quad (8)$$

Найдем начальное условие для уравнения (8), используя при этом начальное условие уравнения (7'), тогда получим

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(0) \sin \lambda_i z,$$

но так как $\sin \lambda_i z \neq 0$, то $v_i(0) = 0$.

Решение уравнения (8) примет вид

$$v_i(t) = \int_0^t a_i(\tau) e^{D\lambda_i^2(\tau-t)} d\tau.$$

Найдем коэффициенты Фурье $a_i(\tau)$

$$a_i(\tau) = \frac{4\lambda_i}{2H\lambda_i - \sin 2\lambda_i H} \int_0^H \left[-\bar{f}'(\tau) - z \frac{\bar{\omega}'(\tau) - \delta \bar{f}'(\tau)}{1 + \delta H} \right] \sin \lambda_i z \, dz =$$

$$= - \frac{4}{2H\lambda_i - \sin 2\lambda_i H} \left(\bar{f}'(\tau) + \bar{\omega}'(\tau) \frac{\sin \lambda_i H}{\lambda_i} \right).$$

Следовательно, решение уравнения (7) имеет вид

$$v_i = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_i z}{2H\lambda_i - \sin 2\lambda_i H} \int_0^t \left[\bar{f}'(\tau) + \bar{\omega}'(\tau) \frac{\sin \lambda_i H}{\lambda_i} \right] e^{D\lambda_i^2(\tau-t)} d\tau,$$

а решение уравнения (5) запишется, как сумма решений $v = v_1 + v_2$

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\lambda_i e^{-D\lambda_i^2 t} \sin \lambda_i z}{2H\lambda_i - \sin 2\lambda_i H} \int_0^H \left[\bar{\varphi}(z) - \bar{f}(0) - z \frac{\bar{\omega}(0) - \delta \bar{f}(0)}{1 + \delta H} \right] \sin \lambda_i z dz - \\ - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4e^{-D\lambda_i^2 t} \sin \lambda_i z}{2H\lambda_i - \sin 2\lambda_i H} \int_0^t \left[\bar{f}'(\tau) + \bar{\omega}'(\tau) \frac{\sin \lambda_i H}{\lambda_i} \right] e^{D\lambda_i^2 \tau} d\tau.$$

Обозначим

$$\frac{4}{2H\lambda_i - \sin 2\lambda_i H} = a_i.$$

Решение уравнения (3а) запишется

$$P = -bt + e^{\delta z} \left\{ f_2(t) + Lf_1(t) + z \frac{[\omega_2(t) + L\omega_1(t)] e^{-\delta H} - \delta [f_2(t) + Lf_1(t) + bt]}{1 + \delta H} + \right. \\ + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i e^{-(v+D\lambda_i^2)t} \sin \lambda_i z \int_0^H \left[(\varphi_2(z) + L\varphi_1(z)) e^{-\delta H} - (f_2(0) + Lf_1(0)) - \right. \\ \left. - z \frac{(\omega_2(0) + L\omega_1(0)) e^{-\delta H} - \delta (f_2(0) + Lf_1(0))}{1 + \delta H} \right] \sin \lambda_i z dz - \\ \left. - \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-(v+D\lambda_i^2)t} \sin \lambda_i z \int_0^t \left[(f'(\tau) + Lf'_1(\tau) + b) e^{v\tau} + (f_2(\tau) + Lf_1(\tau) + b\tau) v e^{v\tau} + \right. \right. \\ \left. + \frac{(\omega'_2(\tau) + L\omega'_1(\tau)) e^{-\delta H + v\tau} + (\omega_2(\tau) + L\omega_1(\tau)) v e^{-\delta H + v\tau}}{\lambda_i} \sin \lambda_i H \right] e^{D\lambda_i^2 \tau} d\tau \left. \right\}. \quad (18a)$$

Обозначим правую часть решения (8а) через $\mu(z, t)$, тогда

$$P = \mu(z, t)$$

или

$$T + La = \mu(z, t). \quad (9)$$

Так как конденсация водяного пара в атмосфере происходит в интервале температур ниже 0° , то абсолютную влажность насыщения можно представить, как функцию, линейно зависящую от температуры

$$\bar{a} = a^0 (1 + \alpha T), \quad (9')$$

где a^0 — абсолютная влажность насыщения при температуре 0° . Подставим во второе уравнение системы (2) значения a и $\bar{a}$ из (9) и (9'), тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial z} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Lc \left[\frac{\mu(z, t) - T}{L} - a^0 (1 + \alpha T) \right] - \gamma_a \omega,$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{\partial T}{\partial z} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \beta T + \xi(z, t), \quad (10)$$

где

$$\beta = c(1 + La^0\alpha), \quad \xi(z, t) = c\mu(z, t) - Lca^0 - \gamma a w.$$

Начальные и граничные условия для уравнения (10) следующие:

$$T|_{t=0} = \varphi_2(z), \quad T|_{z=0} = f_2(t), \quad (10')$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = \omega_2(t).$$

Подстановка $T = \bar{u}e^{\delta z - v't}$, где $\delta = \frac{w}{2D}$, $v' = \frac{w^2}{4D} + \beta$; приводит уравнение (10) к виду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = \xi(z, t) e^{-\delta z + v't}, \quad (11)$$

а начальные и граничные условия (10') к виду

$$\bar{u}|_{t=0} = \bar{\varphi}_2(z), \quad \bar{u}|_{z=0} = \bar{f}_2(t), \quad (11')$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \delta \bar{u} \right)_{|z=H} = \bar{\omega}_2(t),$$

где

$$\bar{\varphi}_2(z) = \varphi_2(z) e^{-\delta z}, \quad \bar{f}_2(t) = f_2(t) e^{v't},$$

$$\bar{\omega}_2(t) = \omega_2(t) e^{-\delta H + v't}.$$

Приведем граничные условия (11') к однородным при помощи следующей подстановки

$$\bar{u} = u + \bar{f}_2(t) + z \frac{\bar{\omega}_2(t) - \delta \bar{f}_2(t)}{1 + \delta H},$$

тогда и уравнение (11) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varphi(z, t), \quad (12)$$

где

$$\varphi(z, t) = \xi(z, t) e^{-\delta z + v't} - \bar{f}_2'(t) - z \frac{\bar{\omega}_2'(t) - \delta \bar{f}_2'(t)}{1 + \delta H},$$

а начальные и граничные условия запишутся

$$u|_{t=0} = \varphi_2^*(z), \quad u|_{z=0} = 0, \quad (12')$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \delta u \right)_{|z=H} = 0,$$

где

$$\varphi_2^*(z) = \bar{\varphi}_2(z) - \bar{f}_2(0) - z \frac{\bar{\omega}_2(0) - \delta \bar{f}_2(0)}{1 + \delta H},$$

а решение уравнения (12) имеет вид, аналогичный виду решения уравнения (5), т. е.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-D \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n z \int_0^H \left[\bar{\varphi}_2(z) - \bar{f}_2(0) - z \frac{\bar{\omega}_2(0) - \bar{\delta} \bar{f}_2(0)}{1 + \delta H} \right] \sin \lambda_n z dz - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-D \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n z \int_0^t \left[\bar{f}_2'(\tau) + \frac{\bar{\omega}'(\tau) \sin \lambda_n H}{\lambda_n} \right] e^{D \lambda_n^2 \tau} d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-D \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n z \int_0^t \int_0^H \xi(z, \tau) e^{-\delta z + v' \tau} e^{D \lambda_n^2 \tau} \sin \lambda_n z dz d\tau.$$

Тогда решение уравнения (10) примет вид

$$T = e^{\delta z} \left\{ f_2(t) + z \frac{\omega_2(t) e^{-\delta H} - \delta f_2(t)}{1 + \delta H} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-(v + D \lambda_n^2)t} \sin \lambda_n z \int_0^H \left[\varphi_2(z) e^{-\delta z} - \right. \right. \\ \left. - f_2(0) - z \frac{\omega_2(0) e^{-\delta H} - \delta f_2(0)}{1 + \delta H} \right] \sin \lambda_n z dz - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(v' + D \lambda_n^2)t} \sin \lambda_n z \int_0^t \left[(f_2'(\tau) + f_2(\tau) v') e^{v' \tau} + \right. \\ \left. + (\omega_2'(\tau) + \omega_2(\tau) v') e^{-\delta H + v' \tau} \frac{\sin \lambda_n H}{\lambda_n} \right] e^{D \lambda_n^2 \tau} d\tau + \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-(v' + D \lambda_n^2)t} \sin \lambda_n z \int_0^t \int_0^H [c \mu(z, \tau) - L c a^0 - \gamma_a \omega] e^{-\delta z} e^{(v' + D \lambda_n^2)\tau} \sin \lambda_n z dz d\tau \right\}. \quad (12a)$$

Обозначим правую часть решения (12a) через $\Theta(z, t)$

$$T = \Theta(z, t), \quad (12б)$$

тогда

$$a = \frac{\mu(z, t) - \Theta(z, t)}{L}. \quad (12в)$$

Подставим вместо a и T в третье уравнение системы (2) их выражения (12б) и (12в), тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} - D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = c \left[\frac{\mu(z, t) - \Theta(z, t)}{L} - a^0 (1 + \alpha \Theta(z, t)) \right],$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial t} - D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = \eta_1(z, t), \quad (13)$$

где

$$\eta_1(z, t) = c \left[\frac{\mu(z, t) - \Theta(z, t)}{L} - a^0 (1 + \alpha \Theta(z, t)) \right].$$

В уравнении (13) начальные и граничные условия следующие:

$$q|_{t=0} = \Phi_3(z), \quad q|_{z=0} = f_3(t), \quad (13')$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=H} = \omega(t).$$

Приведем граничные условия к однородным при помощи следующей подстановки: $q = q_1 + f_3(t) + z\omega_3(t)$, тогда уравнение (13) преобразуется

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2} = \eta(z, t), \quad (14)$$

где

$$\eta(z, t) = \eta_1(z, t) - f_3'(t) - z\omega_3'(t),$$

а начальные и граничные условия запишутся

$$q_1|_{t=0} = \bar{\Phi}_3(z), \quad q_1|_{z=0} = 0, \quad (14')$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0.$$

Решение уравнения (14) имеет вид, аналогичный виду решения уравнения (5), поэтому по аналогии запишем

$$\begin{aligned} q = & \frac{2}{H} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-D\lambda_j^2 t} \sin \lambda_j z \int_0^H \bar{\Phi}_3(z) \sin \lambda_j z dz - \frac{2}{H} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-D\lambda_j^2 t} \sin \lambda_j z}{\lambda_j} \times \\ & \times \int_0^H \left[f_3'(\tau) + (-1)^{j+1} \frac{\omega_3'(\tau)}{\lambda_j} \right] e^{D\lambda_j^2 \tau} d\tau + \frac{2c}{H} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-D\lambda_j^2 t} \sin \lambda_j z \int_0^t \int_0^H \left[\frac{\mu(z, \tau)}{L} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{L} + a^0 \alpha \right) \Theta(z, \tau) - a^0 \right] e^{D\lambda_j^2 \tau} \sin \lambda_j z dz d\tau, \end{aligned}$$

а в первоначальных переменных запишется так:

$$\begin{aligned} q = & f_3(t) + z\omega_3(t) + \frac{2}{H} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-D\lambda_j^2 t} \sin \lambda_j z \int_0^H [\Phi_3(z) - f_3(0) - z\omega_3(0)] \sin \lambda_j z dz - \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-D\lambda_j^2 t} \sin \lambda_j z}{\lambda_j} \int \left[f_3'(\tau) + \frac{(-1)^{j+1} \omega_3'(\tau)}{\lambda_j} \right] e^{D\lambda_j^2 \tau} d\tau + \\ & + \frac{2c}{H} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-D\lambda_j^2 t} \sin \lambda_j z \int_0^t \int_0^H \left[\frac{\mu(z, \tau)}{L} - \left(\frac{1}{L} + a^0 \alpha \right) \Theta(z, \tau) - a^0 \right] e^{D\lambda_j^2 \tau} \sin \lambda_j z dz d\tau. \end{aligned}$$

Полученное решение системы уравнение (2) при самых общих начальных и граничных условиях дает возможность определить значения абсолютной влажности, температуры и водности облака в зависимости от времени и высоты.

Рассмотрим частный случай. Пусть распределение абсолютной влажности по высоте в начальный момент времени подчиняется формуле Накоренко $a_0 e^{-k\gamma z}$, где a_0 — абсолютная влажность у поверхности земли, γ — вертикальный температурный градиент, значение k дано в работе [6]. Будем считать, что температура в начальный момент времени распределена по высоте по линейному закону, т. е. $T = T_0 - \gamma z$. Граничные условия у поверхности земли принимаем следующие: $a|_{z=0} = a_0$, $T|_{z=0} = T_0$, $q|_{z=0} = 0$, где a_0, T_0 — постоянные величины. Вторые граничные условия задаем на тропопause, причем считаем, что

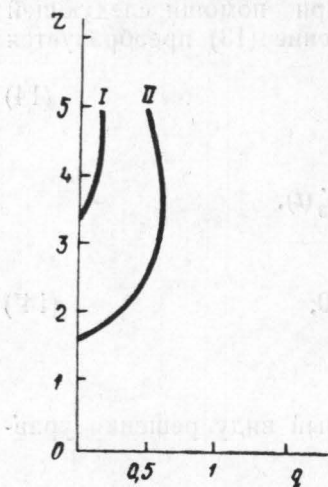


Рис. 1

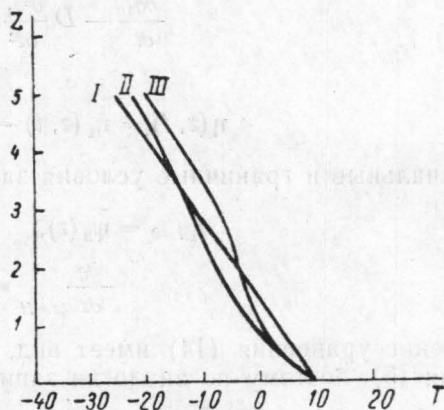


Рис. 2

между тропосферой и стратосферой отсутствует тепло- и влагообмен, т. е. $\frac{\partial T}{\partial z}|_{z=H} = 0$; $\frac{\partial a}{\partial z}|_{z=H} = 0$, а также считаем, что в начальный момент облака отсутствовали.

При вычислениях по ранее приведенным формулам достаточно ограничиться тремя первыми членами ряда. Расчеты, произведенные при следующих числовых данных: $D = 10^5$ см²/сек, $\gamma = 0,7 \cdot 10^{-4}$ град/см, $k\gamma = 5 \cdot 10^{-6}$ см⁻¹, $H = 10^6$ см, $T = 10^\circ$, $a_0 = 5,6 \cdot 10^{-6}$ г/см³, $n = 200$ см⁻³, $\bar{r} = 5 \cdot 10^{-4}$ см, $D^* = 0,2$ см²/сек, $\bar{\rho} = 0,85 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $a^0 = 4,85 \cdot 10^{-6}$ г/см³, $\alpha = 0,04$ град⁻¹, $L = 2,5 \cdot 10^6$ град/см³/г, иллюстрируются следующими графиками.

На рис. 1 по оси абсцисс отложена водность облака в г/м³, а по оси ординат высота в километрах.

На рис. 2 по оси абсцисс отложена температура в градусах Цельсия, а по оси ординат высота в километрах.

На рис. 1 кривая I изображает водность облака, образованного через 18 часов под действием турбулентности при коэффициенте $D = 10^5$ см²/сек в отсутствии восходящих токов, при относительной влажности у поверхности земли 60%. Кривая II на этом рисунке изображает водность облака, образованного под действием турбулентности и восходящих токов при скорости $w = 2$ см/сек и относительной влажности у поверхности земли 60%.

Из рис. 1 видно, что при данных значениях коэффициента турбулентности основную роль в образовании облаков играют восходящие токи. При относительной влажности 50% у поверхности земли под действием турбулентности за время 18 часов облака не образуются.

На рис. 2 кривая I изображает распределение температуры в атмосфере в начальный момент времени, а кривая II изображает распределение температуры через 18 часов при наличии турбулентности и отсутствии восходящих токов. На этом же рисунке кривая III изображает распределение температуры через 18 часов при наличии в атмосфере турбулентности и восходящих токов. Из рис. 2 видно, что в области образования облаков температура повышается за счет теплоты конденсации водяного пара на $1-2^{\circ}$. Поскольку образование облаков в основном происходит при отрицательных температурах, изменение температуры на $1-2^{\circ}$ ничтожно влияет на водность облака. Поэтому при решении подобных систем уравнений уравнением переноса тепла можно пренебречь и считать, что температура в атмосфере задана.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность проф. А. Ф. Дюбюку за помощь, оказанную в выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюбюк А. Ф. Тр. НИУГУГМС, сер. 1, вып. 7, 1945.
2. Швец М. Е. «Изв. АН СССР», сер. геофизическая, № 6, 1955.
3. Арраго Л. Р. Влияние вертикальных токов на влагообмен. ТГГО, вып. 71, 1957.
4. Матвеев Л. Т., Кожарин В. С. «Изв. АН СССР», сер. геофизическая, № 11, 1956.
5. Шишкин Н. С. Облака, осадки и грозовое электричество. Гостехиздат, М., 1954.
6. Накоренко Н. Ф. Тр. НИУГУГМС, сер. 1, вып. 21, 1946.
7. Накоренко Н. Ф. Распределение влажности в атмосфере над Слуцком. «Метерология гидрография», № 9, 1937.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнение математической физики, 1953.

Поступила в редакцию
22. 3 1962 г.

Кафедра
физики атмосферы

