

И. Б. АЛЕКСАНДРОВ, Ю. А. КУХАРЕНКО, А. В. НИУККАНЕН
КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ НЕИДЕАЛЬНОГО ФЕРМИ-ГАЗА

С помощью начального условия ослабления корреляции модификация метода теории возмущений, основанная на введении корреляционного оператора, обобщается для вывода кинетического уравнения пространственно-неоднородной ферми-системы с нелокальным потенциалом взаимодействия. Рассматривается переход к случаю слабонеоднородной системы. Определяется затухание энергетического спектра системы в результате корреляции, обусловленной взаимодействием.

При помощи метода производящего функционала Н. Н. Боголюбова [1], обобщенного на случай квантовой статистики [3], для S -частичных операторов плотности

$$F_s = \text{Sp}_{(s+1, \dots, N)} \rho(1, \dots, N)$$

получим цепочку зацепляющихся уравнений

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \left[\sum_{i=1}^N T_i + \sum_{i \leq j < r < N} \Phi(j, r); F_s \right] + \frac{1}{v} \text{Sp}_{(s+1)} \left[\sum_{i < k \leq s} \Phi(k, s+1); F_{s+1} \right], \quad (1)$$

где Φ — потенциал парного взаимодействия частиц, матрица которого в координатном представлении

$$\langle r_1 r_2 \sigma_1 \sigma_2 | \Phi | r'_1 r'_2 \sigma'_1 \sigma'_2 \rangle = \langle r_1 r_2 | \Phi | r'_1 r'_2 \rangle \Delta(\sigma_1 - \sigma'_1) \Delta(\sigma_2 - \sigma'_2)$$

не предполагается диагональной. Отметим, что предположение о нелокальности потенциального оператора весьма существенно для ряда задач теории многих тел. Потенциал такого типа учитывает сильную парную корреляцию и короткодействующий характер сил и используется, например, в методе Бракнера [5], позволяющем учесть в схеме самосогласованного поля парные корреляции частиц.

Для выполнения закона сохранения импульса потребуем, чтобы матричные элементы $\Phi(r_1 r_2; r'_1 r'_2)$ были инвариантны по отношению к пространственным трансляциям. В этом случае импульсное представление содержит δ -функцию, обеспечивающую закон сохранения

$$\Phi(r_1 r_2; r'_1 r'_2) = \int \tilde{\Phi}(p_1 p_2; p'_1 p'_2) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_1 r_1 + p_2 r_2 - p'_1 r'_1 - p'_2 r'_2) \right\} dp_1 dp_2 dp'_1 dp'_2,$$

где

$$\tilde{\Phi}(p_1 p_2; p'_1 p'_2) = \Phi(p_1 p_2; p'_1 p'_2) \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2). \quad (2)$$

Условия эрмитовости гамильтониана системы накладывают на матричные элементы $\Phi(p_1 p_2; p'_1 p'_2)$ следующее свойство симметрии:

$$\tilde{\Phi}(p_1 p_2; p'_1 p'_2) = \Phi(p'_1 p'_2; p_1 p_2). \quad (3)$$

Кроме того, в силу свойств симметрии, налагаемых статистикой, $\Phi(p_i p_j; p'_i p'_j)$ следует считать антисимметризованной функцией по отношению к перестановке индексов $p_i \leftrightarrow p_j$ и $p'_i \leftrightarrow p'_j$:

$$\Phi(p_i p_j; p'_i p'_j) = \tilde{\Phi}(p'_i p'_j; p_i p_j) = \Phi(p_j p_i; p'_j p'_i). \quad (4)$$

Система уравнений (1) является основой для получения кинетического уравнения системы тождественных ферми-частиц в случае произвольного нелокального потенциала взаимодействия. В предположении малости потенциальной энергии взаимодействия пары частиц по сравнению с их средней кинетической энергией можно ввести малый параметр теории возмущений $\Phi \rightarrow \varepsilon \Phi$. Введение малого параметра позволяет применить для вывода кинетического уравнения особый метод степенных разложений [2], основанный на введении оператора g корреляционного отклонения функций F_2 и F_3 от мультипликативных функций, соответствующих нулевому приближению:

$$F_2(1, 2; t) = \gamma_2 F_1(1) F_1(2) + \varepsilon g(1, 2; t),$$

$$F_3(1, 2, 3; t) = \gamma_3 F_1(1) F_1(2) F_1(3) + \varepsilon \gamma_3 g(1, 2, 3; t) F_1(3), \quad (5)$$

где $\gamma_s = \sum_{(p)} (-1)^p$ означает антисимметризованную сумму по всем перестановкам S -частиц.

Этот способ позволяет получить уравнение для F_1 с нерасходящимися членами до второго порядка включительно.

Подставляя (5) в исходные уравнения (1), записанные для F_1 и F_2 , получим уравнение для корреляционного оператора

$$i\hbar \frac{\partial g(p_1, p_2; p'_1, p'_2; t)}{\partial t} = (T_{p_1} + T_{p_2} - T_{p'_1} - T_{p'_2}) g(p_1, p_2; p'_1, p'_2; t) + A(p_1, p_2; p'_1, p'_2; F_1(t)), \quad (6)$$

где

$$A(p_1, p_2; p'_1 p'_2; F_1(t)) = \int dp'_1, dp'_2 \{L_1(p_1, p_2; p'_1, p'_2; p'_1 p'_2) + \frac{1}{v} \int dp_3 dp'_3 L_2(p_1, p_2, p_3; p'_1, p'_2, p'_3; p'_1, p'_2, p'_3)\}, \quad (7)$$

$$L_1 = \tilde{\Phi}(p_1, p_2; p'_1, p'_2) \gamma_2^* F_1(p'_1, p'_1) F_1(p'_2, p'_2) - \tilde{\Phi}(p'_1, p'_2; p_1, p_2) \gamma_2^* F_1(p_1, p_1) F_1(p_2, p_2),$$

$$\begin{aligned}
 L_2 = & \{ \tilde{\Phi}(p_1, p_3; p_1'', p_3'') \delta(p_2 - p_2'') + \tilde{\Phi}(p_2, p_3; p_2'', p_3'') \times \\
 & \times \delta(p_1 - p_1'') \} \gamma_3'' F_1(p_1'', p_1') F_1(p_2'', p_2') F_1(p_3'', p_3) - \\
 & - \{ \tilde{\Phi}(p_1'', p_3''; p_1', p_3') \delta(p_2' - p_2') + \tilde{\Phi}(p_2'', p_3''; p_2', p_3') \times \\
 & \times \delta(p_1' - p_1'') \} \gamma_3'' F_1(p_1, p_1') F_1(p_2, p_2') F_1(p_3, p_3').
 \end{aligned} \quad (8)$$

Для получения замкнутого уравнения для F_1 необходимо найти решение уравнения (6), явно выражающее функцию g через F_1 . Наложим для этого на решение уравнения (6) граничное условие ослабления корреляций $g(t)$

$$g(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty, \quad (9)$$

использованное в [4] для случая пространственно-однородного распределения и диагонального потенциала. Заметим, что условие ослабления корреляции позволяет обобщить метод теории возмущений на рассматриваемый нами случай пространственно-неоднородной ферми-системы с нелокальным взаимодействием.

Решение уравнения (6) с учетом граничного условия (9) имеет вид

$$\begin{aligned}
 g(t, p_1, p_2; p_1', p_2') = & -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (T(p_1) + \right. \\
 & \left. + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2')) (t - \tau) \right\} A(p_1, p_2; p_1', p_2'; \tau).
 \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя полученное для g решение в первое уравнение цепочки (1) и учитывая (5), получаем кинетическое уравнение для системы фермионов с нелокальным взаимодействием в общем пространственно-неоднородном случае

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial F_1(t, p_1, p_1')}{\partial t} = & (T_{p_1} - T_{p_1'}) F_1(t, p_1, p_1') + \\
 & + \frac{\varepsilon}{v} \int dp_2 dp_1'' dp_2'' L_1(p_1, p_2; p_1'', p_2''; p_1', p_2) + \\
 & + \frac{\varepsilon^2}{v} \int_{-\infty}^t d\tau \int dp_2 dp_1'' dp_2'' \{ \tilde{\Phi}(p_1, p_2; p_1'', p_2'') A(p_1'', p_2''; p_1', p_2; \tau) \times \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (T(p_1'') + T(p_2'') - T(p_1') - T(p_2)) (t - \tau) - \right. \\
 & \left. - \tilde{\Phi}(p_1'', p_2''; p_1', p_2) A(p_1, p_2; p_1'', p_2''; \tau) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (T(p_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2')) (t - \tau) \right] \right].
 \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, получено уравнение вида

$$i\hbar \frac{\partial F_1}{\partial t} (T_{p_1} - T_{p_1'}) F_1 + \varepsilon K(F_1) + \varepsilon^2 I(F_1),$$

в котором члены всех порядков вплоть до второго не обращаются в нуль в отличие от уравнения для пространственно-однородного распределе-

ния [4]. Член нулевого порядка в правой части уравнения соответствует свободному движению системы в отсутствие взаимодействия между частицами. Член порядка ε описывает согласованное взаимодействие частиц в приближении Хартри—Фока, так как при выводе уравнения было учтено требование антисимметрии операторов плотности. Член, пропорциональный ε^2 , представляет собой обобщение больцмановского интеграла столкновений, но тем не менее не сводится к механизму парных соударений, поскольку в нем учтены и коллективные эффекты. При переходе к пространственно-однородному случаю этот член принимает форму стандартного больцмановского интеграла столкновений. Известно, что близкое действие, включенное в «ударный» член, проявляющийся лишь в квадратичном приближении по ε , есть результат ограничения, наложенного на взаимодействие специальным выбором потенциала.

Рассмотрим малое отклонение от равновесного пространственно-однородного распределения системы ферми-частиц

$$F_1(t; p_1, p'_1) = F_0(p_1, p'_1) + \delta F_1(t; p_1, p'_1), \quad (12)$$

где

$$F_0(p_1, p'_1) = v n(p_1) \delta(p_1 - p'_1)$$

представляет собой некоторую равновесную функцию пространственно-однородного распределения, а $n(p_1)$ — числа заполнения состояний с заданными импульсами и спинами.

Отметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} F_0 = 0, \quad (T_{p_1} - T_{p'_1}) F_0 = 0, \quad K(F_0) = 0$$

и уравнение для F_0 принимает вид

$$I_B(F_0) = \int dp_2 dp'_1 dp'_2 |\Phi(p_1, p_2; p'_1, p'_2) - \Phi(p_1, p_2; p'_2, p'_1)|^2 \times \\ \times [n_{p_1} n_{p_2} (1 - n_{p'_1}) (1 - n_{p'_2}) - n_{p'_1} n_{p'_2} (1 - n_{p_1}) (1 - n_{p_2})] = 0. \quad (13)$$

Подставляя (12) в (11) и пренебрегая членами, содержащими билинейные комбинации матричных элементов $\delta F_1(p_1, p'_1)$, получаем варьированное линеаризованное уравнение для малого отклонения δF_1 . Поскольку нас интересует нахождение решений, описывающих малые отклонения системы от исходного однородного распределения F_0 , представим δF_1 в следующем виде:

$$\delta F_1^{(q)}(t; p_1, p'_1) = f_q(p_1, t) \delta(p_1 - p'_1 - q). \quad (14)$$

Очевидно, общее решение варьированного уравнения в силу его линейности может быть построено из частных решений вида (14).

Для f_q после простых, но довольно громоздких выкладок получим варьированное уравнение, проинтегрированное по p'_1

$$i\hbar \frac{\partial f_q(p_1, t)}{\partial t} (T_{p_1} - T_{p_1 - q}) f_q(p_1, t) + \varepsilon \int dp_2 \{R(p_1, p_2) \times \\ \times [B(p_1, p_2; p_1, p_2) + B(p_1 - q, p_2; p_1 - q, p_2)] + \\ + B(p_1, p_2; p_1 - q, p_2 + q) [R(p_2, p_1) + R(p_2, p_1 - q)]\} - \\ - \frac{i\varepsilon^2}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \int dp_2 dp'_1 dp'_2 \left[\Phi(p_1, p_2; p'_1, p'_2) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} (T_{p'_1} - \right.$$

$$-T_{p_1} + T_{p_2} - T_{p_1-q} (t - \tau) \} \delta A(p_1^*, p_2^*; p_1 - q, p_2; \tau) - \Phi(p_1^*, p_2^*; p_1 - q, p_2) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} T_{p_1} + T_{p_2} - T_{p_1} - T_{p_2} \right\} \delta A(p_1, p_2; p_1^*, p_2^*; \tau) \Big], \quad (15)$$

где введены следующие обозначения:

$$R(p_1, p_2) = f_q(p_1) n(p_2), \quad (16)$$

$$B(p_1, p_2; p_1', p_2') = \Phi(p_1, p_2; p_1', p_2') - \Phi(p_1, p_2; p_2', p_1').$$

Варьируемый коэффициент $\delta A(p_1, p_2; p_1', p_2')$ представляет собой следующую сумму:

$$\delta A(p_1, p_2; p_1', p_2') = \delta G^{(0)}(p_1, p_2; p_1', p_2') \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2' - q) + \\ + \delta G^{(1)}(p_1; p_2, p_3) \delta(p_2 - p_2') \delta(p_1 - p_1' - q) + \delta G^{(2)}(p_1; p_2, p_3) \times \\ \times \delta(p_2 - p_1') \delta(p_1 - p_2' - q) + \delta G^{(3)}(p_1; p_2, p_3) \delta(p_1 - p_1') \times \\ \times \delta(p_2 - p_2' - q) + \delta G^{(4)}(p_1; p_2, p_3) \delta(p_1 - p_2') \delta(p_2 - p_1' - q). \quad (17)$$

Таким образом, коэффициент квадратичного члена кинетического уравнения распадается на две группы членов: одни соответствуют процессам с сохранением суммарного импульса, другие — «одночастичным» возбуждениям (как прямым, так и обменным).

Имея в дальнейшем в виду переход к случаю малых импульсов передачи, мы не приводим здесь общих выражений для коэффициентов кинетического уравнения при произвольных q [10]. Отметим лишь, что $\delta G^{(0)}$ имеет в отличие от $\delta G^{(1)}$, $\delta G^{(2)}$, $\delta G^{(3)}$, $\delta G^{(4)}$ структуру варьируемого больцмановского члена; $\delta G^{(1),(2)}$ и $\delta G^{(3),(4)}$ представляют собой отклонение от больцмановского члена, обусловленное неоднородностью.

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда импульс q достаточно мал в том смысле, что члены кинетического уравнения, пропорциональные $\varepsilon^2 q$, имеют более высокий порядок малости, чем члены, пропорциональные ε^2 . Поскольку кинетическое уравнение выводится в квадратичном по ε приближении, в $\delta G^{(0)}$ можно положить $q=0$, что соответствует учету главного члена разложения в ряд по степеням q .

Отметим, что формальное рассмотрение кинетического поведения системы без предположения малости q приводит к громоздкому уравнению, анализ которого весьма затруднителен. Предложенная аппроксимация значительно упрощает вывод кинетического уравнения и позволяет учесть основные эффекты высшего порядка. Понятно, что предположение о малости импульса q наиболее оправдано для случая достаточно низких температур.

В этом приближении в уравнении (15) исчезают члены, представляющие собой отклонение от интеграла больцмановского типа, так как при $q=0$ разности вида

$$\delta G^{(1)}(p_1; p_2, p_3) - \delta G^{(3)}(p_2; p_1, p_3)$$

обращаются в нуль в силу следующего свойства симметрии [10]:

$$\delta G^{(1)}(p_i; p_j, p_3) = \delta G^{(3)}(p_j; p_i, p_3). \quad (i, j = 1, 2)$$

Член $\delta G^{(0)}$ при $q=0$ принимает вид

$$\delta G^{(0)}(p_1, p_2; p_1', p_2') = B(p_1, p_2; p_1', p_2') S(p_1, p_2; p_1', p_2', f_q), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
 S(p_1, p_2; p'_1, p'_2; f_q) &= \alpha_1(p_1, p_2; p'_1, p'_2) f_q(p'_1) + \\
 &+ \alpha_2(p_1, p_2; p'_1, p'_2) f_q(p'_2) + \beta_1(p_1, p_2; p'_1, p'_2) f_q(p_1) + \\
 &+ \beta_2(p_1, p_2; p'_1, p'_2) f_q(p_2).
 \end{aligned} \quad (19)$$

Коэффициенты α_i, β_j представляют собой симметричные комбинации чисел заполнения

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(p_1, p_2; p'_1, p'_2) &= \alpha_2(p_2, p_1; p'_2, p'_1) = -\beta_2(p'_2, p'_1; p_2, p_1) = \\
 &= -\beta_1(p'_1, p'_2; p_1, p_2) = n_{p'_2} - n_{p_2} n_{p'_2} - n_{p_1} n_{p'_1} + n_{p_1} n_{p_2}.
 \end{aligned} \quad (20)$$

В силу равенств (20) имеем следующие соотношения симметрии:

$$S(p_1, p_2; p'_1, p'_2) = -S(p'_1, p'_2; p_1, p_2), \quad (21)$$

$$S(p_1, p_2; p'_1, p'_2) = S(p_1, p_2; p'_2, p'_1) = S(p_2, p_1; p'_1, p'_2).$$

Учитывая (20), (21), (3), (4), квадратичный член уравнения (15) после симметризирующей замены переменных интегриации $p_1'' \leftrightarrow p_2''$ преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 -\frac{i\epsilon^2}{2\hbar} J(f_q) &= -\frac{i\epsilon^2}{2\hbar} \int dp_2 dp_1'' dp_2'' \int_{-\infty}^t d\tau S(p_1, p_2; p_1'', p_2'', \tau) \times \\
 &\times |B(p_1, p_2; p_1'', p_2'')|^2 \delta(p_1 + p_2 - p_1'' - p_2'') \left\{ \exp\left[\frac{i}{\hbar}(T_{p_1}'' + T_{p_2}'' - \right. \right. \\
 &\left. \left. - T_{p_1} - T_{p_2})(t - \tau)\right] + \exp\left[\frac{i}{\hbar}(T_{p_1} + T_{p_2} - T_{p_1}'' - T_{p_2}'')(t - \tau)\right] \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

В частном случае медленного изменения $F_1(t)$ во времени по сравнению с бинарной функцией распределения $F_2(t)$ [2] коэффициент S можно вынести за знак интеграла по времени. Заменяя переменную $t - \tau \rightarrow t$ и учитывая, что $\delta_+(x) = \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{i}{2\pi x}$, находим для квадратичного члена уравнения выражение, содержащее под интегралом борновскую вероятность перехода для двухчастичного рассеяния. Наличие импульсной и энергетической дельта-функций обеспечивает выполнение законов сохранения. Таким образом, в частном случае «синхронизированных» функций F_1 и F_2 квадратичный член кинетического уравнения принимает стандартную форму варьированного больцмановского интеграла столкновений.

Рассмотрим далее самосогласованное движение системы для случая распределения, мало отличающегося от однородного. Подставим в уравнение (15) функцию R в явном виде и входящую в член Хартри—Фока функцию $n(p_1 - q)$ разложим в степенной ряд в окрестности $q=0$. Поскольку член, соответствующий самосогласованному полю, линеен по ϵ , то в нашем приближении достаточно ограничиться первыми двумя членами разложения. Отметим, что при абсолютном нуле температуры непосредственное разложение функций чисел заполнения, входящих в член самосогласованного поля в ряд по степеням q , математически не оправдано, так как n испытывает разрыв на поверхности Ферми. Случай $T=0$ следует рассматривать особо, как предельный случай $T \rightarrow 0$.

Заменяя функцию $B(p_1 - q, p_2, p_2, p_1 - q)$ ее рядом по степеням q и учитывая, что

$$B(p_1, p_2; p_1, p_2) - B(p_1, p_2; p_2, p_1) = 0,$$

в пренебрежении членами порядка εq^2 получаем уравнение

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial f_q(p_1, t)}{\partial t} = & \left\{ \frac{p_1 q}{m} + \varepsilon q \int dp_2 n(p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} B(p_1, p_2; p_2, p_1) \right\} f_q(p_1, t) + \\ & + \varepsilon q \frac{\partial n(p_1)}{\partial p_1} \int dp_2 f_q(p_2, t) B(p_1, p_2 - q; p_2, p_1 - q) - \\ & - i\pi \varepsilon^2 \int dp_2 dp_1'' dp_2'' S(p_1, p_2; p_1'', p_2'') |B(p_1, p_2; p_1'', p_2'')|^2 \times \\ & \times \delta(p_1 + p_2 - p_1'' - p_2'') \delta(T_{p_1} + T_{p_2} - T_{p_1''} - T_{p_2''}). \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что для функции $B(p_1; p_2 - q; p_2, p_1 - q)$ не следует использовать линейную аппроксимацию по q , хотя в приближении, квадратичном по ε , это формально допустимо. Например, в случае диагонального потенциала, когда

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(p_1, p_2; p_1', p_2') &= \Phi(p_1, p_2; p_1', p_2') \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') = \\ &= \Phi(p_1 - p_1'; p_2 - p_2') \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2'), \end{aligned} \quad (24)$$

имеем

$$B(p_1, p_2 - q; p_2, p_1 - q) = \Phi(p_1 - p_2) - \Phi(q).$$

Не исключена возможность, что для некоторых физических задач потенциал имеет особенность в нуле, что исключает возможность разложения по степеням q .

На основе уравнения (23) можно произвести более последовательный учет в уравнении с самосогласованным полем эффектов корреляции частиц, обусловленных взаимодействием. Покажем, что в частном случае диагонального потенциала (24) уравнение (23) переходит в уравнение с самосогласованным полем, рассмотренное в [6, 7]. Действительно, в этом случае

$$\frac{\partial}{\partial p_1} B(p_1, p_2; p_2, p_1) = \frac{\partial}{\partial p_1} \Phi(p_1 - p_2) = - \frac{\partial}{\partial p_2} \Phi(p_1 - p_2),$$

и уравнение (23) после интегрирования по частям в первом линейном по ε члене принимает вид

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial f_q(p_1; t)}{\partial t} = & \left\{ \frac{p_1 q}{m} - \varepsilon q \int dp_2 \frac{\partial n(p_2)}{\partial p_2} \Phi(p_1 - p_2) \right\} f_q(p_1; t) + \\ & + \varepsilon q \frac{\partial n(p_1)}{\partial p_1} \int dp_2 f_q(p_2; t) [\Phi(p_1 - p_2) - \Phi(q)] - i\pi \varepsilon^2 I_B(f_q). \end{aligned} \quad (25)$$

По сравнению с уравнением, рассмотренным в [6], уравнение (25) дополнено учетом обменных эффектов и с точностью до члена $-i\pi \varepsilon^2 I_B(f_q)$ совпадает с уравнением самосогласованного поля [7], в котором функции заполнения заменены «оборванными» степенными разложениями.

Если при выводе уравнения ограничиться случаем, когда время релаксации, обусловленное ударным взаимодействием, значительно превышает характерное время процессов, связанных с самосогласован-

ным полем, то уравнение работы [7] может быть получено без предположения малости импульса q . Для этого нужно перейти в уравнении (15) от функций $f_q(p)$ к функциям со сдвинутым аргументом $\Phi_q(p) = f_q(p + \frac{q}{2})$ и учесть, что в случае диагонального потенциала разности типа

$$\Phi\left(p_1 + \frac{q}{2}, p_2 + \frac{q}{2}; p_1 + \frac{q}{2}, p_2 + \frac{q}{2}\right) - \\ - \Phi\left(p_1 - \frac{q}{2}, p_2 + \frac{q}{2}; p_1 - \frac{q}{2}, p_2 + \frac{q}{2}\right)$$

обращаются в нуль. При этом получим, что несимметризованная часть линейного члена уравнения (15) имеет вид

$$\frac{\varepsilon}{v} \int dp_2 \Phi_q(p_2) \Phi(q) \left\{ n\left(p_1 - \frac{q}{2}\right) - n\left(p_1 + \frac{q}{2}\right) \right\}.$$

Учет обменных эффектов дает дополнительный вклад в член самосогла-сованного поля

$$\frac{\varepsilon}{v} \int dp_2 \Phi_q(p_2) \Phi(p_1 - p_2) \left\{ n\left(p_1 + \frac{q}{2}\right) - n\left(p_1 - \frac{q}{2}\right) \right\} + \\ + \frac{\varepsilon}{v} \int dp_2 \Phi_q(p_1) \Phi(p_1 - p_2) \left\{ n\left(p_2 - \frac{q}{2}\right) - n\left(p_2 + \frac{q}{2}\right) \right\}.$$

Таким образом, уравнение с самосогла-сованным полем строго обосновано в предположении малости Φ по сравнению со средней кинетической энергией при условии применимости разработанной в [2] теории возмущений.

Помимо члена с самосогла-сованным полем уравнение (25) содержит бoльцмановский член, который необходимо учитывать при выборе нулевого приближения для функции распределения. В качестве нулевого приближения обычно берется равновесное пространственно-однородное распределение. Как видим, это распределение не может быть выведено из уравнения с самосогла-сованным полем, поскольку в нем при этом все члены обращаются в нуль тождественно. Таким образом, для нахождения нулевого приближения необходимо учесть член, обусловленный парной корреляцией [10], ответственный за установление равновесного распределения. Заметим, что в качестве нулевого приближения может быть выбрано неравновесное пространственно-однородное распределение, которое удовлетворяет уравнению, выведенному в [4]

$$F_0(t; p_1, p_1') = vn(p_1; t) \delta(p_1 - p_1').$$

В работах [6], [7] на основе уравнения с самосогла-сованным полем были получены дисперсионные уравнения для энергетического спектра бозе и ферми-систем. Эти уравнения решались в предположении малости эффектов корреляции, обусловленных взаимодействием.

Очевидно, появление члена $-i\pi\varepsilon^2 I_B(f_q)$ в уравнении (25) должно привести к затуханию энергетического спектра системы. «Самосогла-сованным» затуханием γ_{sc} [8] можно пренебречь, поскольку γ_{sc} при малом q быстро убывает.

Для вычисления затухания γ_{st} , обусловленного больцмановским членом в уравнении (25), разобьем варьированный интеграл столкновений на две части

$$\begin{aligned}
 -i\pi\varepsilon^2 I(f_q) = & -i\pi\varepsilon^2 \int dp_2 dp_1'' dp_2'' |B(p_1, p_2; p_1'', p_2'')|^2 \alpha_1(p_1'', p_2''; p_1, p_2) \times \\
 & \times \delta(p_1 + p_2 - p_1'' - p_2'') \delta(T_{p_1} + T_{p_2} - T_{p_1''} - T_{p_2''}) f_q(p_1) + \\
 & + \frac{\pi\varepsilon^2}{i} \int dp_2 dp_1'' dp_2'' |B(p_1, p_2; p_1'', p_2'')|^2 \{ \alpha_2(p_1'', p_2''; p_1, p_2) f_q(p_2) + \\
 & + \beta_1(p_1'', p_2''; p_1, p_2) f_q(p_1'') + \beta_2(p_1'', p_2''; p_1, p_2) f_q(p_2'') \} \times \\
 & \times \delta(p_1 + p_2 - p_1'' - p_2'') \delta(T_{p_1} + T_{p_2} - T_{p_1''} - T_{p_2''}). \quad (26)
 \end{aligned}$$

Считая, что частота спектра велика по сравнению с частотой столкновений $\frac{1}{\tau}$ (τ — среднее время свободного пробега частицы), и учитывая, что больцмановский член имеет порядок ε^2 , вторым членом в (26) пренебрегаем. Уравнение (25) в пренебрежении эффектами, связанными с гождественностью частиц, приобретает вид

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial f_q(\vec{p}_1; t)}{\partial t} = & \frac{\vec{p}_1 q}{m} - \vec{\varepsilon} q \frac{\partial n(p_1)}{\partial p_1} \Phi(q) \int d\vec{p}' f_q(\vec{p}'; t) - \\
 & - i\pi\varepsilon^2 f_q(\vec{p}, t) \int dp_2 dp_1'' dp_2'' |B(p_1, p_2; p_1'', p_2'')|^2 \times \\
 & \times \alpha_1(p_1'', p_2''; p_1, p_2) \delta(p_1 + p_2 - p_1'' - p_2'') \delta(T_{p_1} + T_{p_2} - T_{p_1''} - T_{p_2''}). \quad (27)
 \end{aligned}$$

Очевидно, наличие квадратичного члена в (27) приводит к затуханию спектра малых колебаний функции распределения

$$\begin{aligned}
 \gamma_{st} = & \pi\varepsilon^2 \int dp_2 dp_1'' dp_2'' |B(p_1, p_2; p_1'', p_2'')|^2 \times \\
 & \times \alpha_1(p_1'', p_2''; p_1, p_2) \delta(T_{p_1} + T_{p_2} - T_{p_1''} - T_{p_2''}) \delta(p_1 + p_2 - p_1'' - p_2''). \quad (28)
 \end{aligned}$$

Переходя в $\alpha_1(p_1'', p_2''; p_1, p_2)$ от чисел заполнения $n(p)$ к числам $m(p)$, определяемым с помощью соотношения

$$n(p_i) = \frac{1}{1 + m(p_i)} = \frac{1}{1 + C \exp\left(-\frac{T(p_i)}{\theta}\right)},$$

и учитывая, что $m(p_i) > 0$, устанавливаем положительную определенность функции $\alpha_1(p_1'', p_2''; p_1, p_2)$, откуда следует $\gamma_{st} > 0$.

Перейдем в уравнении (27) от функций $f_q(\vec{p}; t)$ к функциям $f_{q,s}(\vec{p})$ с помощью преобразования Лапласа — Меллина

$$f_q(\vec{p}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} f_{q,s}(\vec{p}) e^{st} ds. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (27) и полагая $\vec{q} \rightarrow \hbar\vec{q}$, получаем

$$\left\{ s + \frac{i\vec{q}\vec{p}_1}{m} + \frac{\pi\epsilon^2}{\hbar} I_B(\vec{p}_1) \right\} f_{q,s}(\vec{p}_1) x - \\ - i\Phi(q) \frac{\partial n(\vec{p}_1)}{\partial \vec{p}_1} \vec{q} \int f_{q,s}(\vec{p}') d\vec{p}' = f_{\vec{q}}(\vec{p}_1, 0). \quad (30)$$

С помощью (30) легко найти решение для фурье — компонента распределения плотности

$$\rho_{q,s} = \int f_{q,s}(\vec{p}) d\vec{p}.$$

Нули знаменателя в выражении для $\rho_{q,s}$ определяют энергетический спектр рассматриваемой системы. Учитывая это, получаем дисперсионное уравнение для энергетического спектра малых колебаний плотности

$$1 = i\Phi(q) \int \frac{\vec{q} \frac{\partial n}{\partial \vec{p}}}{s + \frac{i\vec{q}\vec{p}}{m} + \frac{\pi\epsilon^2}{\hbar} I_B(\vec{p})} d\vec{p}. \quad (31)$$

Знаменатель подынтегрального выражения (31) содержит в качестве слагаемого член $\frac{\pi\epsilon^2}{\hbar} I_B(\vec{p})$, который учитывает затухание спектра в результате корреляции, обусловленной взаимодействием.

Авторы искренне признательны Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе и ценные советы. Авторы благодарны Д. Н. Зубареву и Ю. Л. Климонтовичу за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, М., 1946.
2. Боголюбов Н. Н., Гуров К. П. ЖЭТФ, 17, 614, 1947.
3. Гуров К. П. Диссертация. МГУ, 1947.
4. Александров И. Б., Кухаренко Ю. А., Ниукканен А. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 1, 1963.
5. Вигескпер К. А. Phys. Rev., 97, 1353, 1955.
6. Климонтович Ю. Л., Силин В. П. ЖЭТФ, 23, 645, 1952.
7. Силин В. П. ЖЭТФ, 27, 269, 1954.
8. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, 16, 574, 1946.
9. Ниукканен А. В. Дипломная работа. МГУ, 1962.
10. Климонтович Ю. Л. ЖЭТФ, 21, 1284, 1951.

Поступила в редакцию
11. 9 1962 г.

Кафедра
статистической физики и
механики