

В. Н. ПАРЫГИН

О РАСШИРЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПРИ УМНОЖЕНИИ ЧАСТОТЫ

Показано, что при умножении частоты в k раз естественная ширина спектральной линии увеличивается в k^2 раз, а техническая ширина — в k раз за счет нелинейного преобразования спектра. Вычислены статистические характеристики фазы и спектр выходного сигнала шумящего умножителя.

Умножители частоты находят широкое применение в различных схемах получения стабильных частот. В связи с этим большой интерес представляет вопрос о том, каким образом искажается спектральная линия сигнала, прошедшего через умножитель частоты. Расширение спектральной линии при умножении происходит в основном по двум причинам. Во-первых, из-за нелинейного преобразования меняется расстояние между спектральными компонентами входного сигнала. В связи с этим даже идеальный (нешумящий) умножитель дает определенное расширение спектральной линии. Во-вторых, причиной изменения выходного спектра могут быть собственные шумы умножителя.

Рассмотрим действие этих двух причин отдельно.

§ 1. Расширение спектральной линии нешумящим умножителем

Пусть на вход идеального умножителя частоты поступает сигнал от реального генератора

$$x = x_0 [1 + m(t)] \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где $m(t)$ — мгновенная глубина хаотической модуляции амплитуды,

$$\varphi(t) \text{ — мгновенное значение фазы, равное } \varphi(t) = \int_{-\infty}^t \nu(x) dx,$$

$\nu(t)$ — мгновенная девиация частоты.

Известно, что амплитудные флуктуации сигнала практически не влияют на ширину его спектральной линии [1, 2, 3]. Поэтому в (1) можно пренебречь $m(t)$.

Как показано в работах [4, 5], ширина и форма спектральной линии сигнала в (1) определяется спектром флуктуаций его частоты. Пусть $\omega(\omega)$ — спектральная плотность среднего квадрата девиации

частоты, а τ_0 — время корреляции частотных флуктуаций. Это означает, что ширина спектра $\omega(\omega)$ равна $\frac{1}{\tau_0}$.

Ширина и форма спектральной линии сигнала существенно зависят от величины безразмерного параметра $\mu = \omega(0)\tau_0$.

Если этот параметр много меньше единицы (т. е. происходят быстрые, но слабые изменения частоты), то ширина спектральной линии равна

$$\Delta\omega_d = \frac{\omega(0)}{2}. \quad (2)$$

В другом предельном случае, когда $\omega(0)\tau_0 \gg 1$,

$$\Delta\omega_d = \sqrt{\frac{\pi\omega(0)}{2\tau_0}}. \quad (3)$$

При промежуточных значениях μ , $\Delta\omega_d$ является чем-то средним между (2) и (3). Обычно малые, но быстрые изменения частоты генератора бывают связаны с дробовыми и тепловыми шумами, поэтому уравнение (2) определяет естественную ширину линии.

Сильные, но медленные уходы частоты обычно определяются техническими уходами напряжений питания и температурой, поэтому (3) дает техническую ширину линии сигнала (1).

Идеальный умножитель частоты в k раз, на вход которого подан сигнал (1), дает на выходе

$$y = y_0 \cos(k\omega_0 t + k\varphi(t) + \psi_0), \quad (4)$$

где ψ_0 — постоянная величина. (Амплитудными флуктуациями выходного сигнала можно пренебречь.) Очевидно, что статистические характеристики выходного сигнала в (4) связаны с соответствующими характеристиками в (1) таким образом, что

$$\omega_{\text{вых}}(\omega) = k^2 \omega_{\text{вх}}(\omega); \quad \tau_{0\text{вых}} = \tau_{0\text{вх}}.$$

Таким образом, спектральная линия ширины (2) при умножении в k раз расширяется в k^2 раз, а спектральная линия ширины (3) расширяется в k раз.

В общем случае умножения частоты в k раз с помощью идеального умножителя абсолютная величина ширины спектральной линии увеличивается более чем в k раз, т. е. происходит увеличение относительной ширины линии. При этом «естественная» относительная ширина линии увеличивается в k раз, относительная величина медленных технических уходов сохраняется.

§ 2. Роль собственных шумов умножителя

Для того чтобы оценить роль собственных шумов умножителя частоты, рассмотрим конкретную схему умножителя на нелинейной емкости, изображенную на рисунке.

Во входном контуре умножителя, настроенном на частоту ω_{01} , действует внешняя э.д.с. частоты p , близкой к ω_{01} . Выходной контур настроен на частоту ω_{02} , близкую к $k p$, где k — коэффициент умножения.

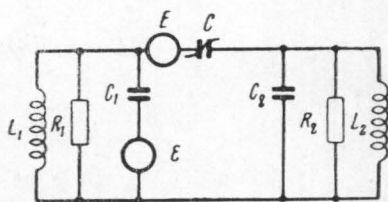
Нелинейная емкость C следующим образом зависит от напряжения:

$$C = C_0 (1 + \beta U_c^{k-1}). \quad (5)$$

Поскольку нас интересует роль собственных шумов умножителя, будем считать входной сигнал идеальным (нефлуктуирующим):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin pt.$$

Будем считать, что основным источником шумов умножителя является $p-n$ переход полупроводникового диода. (На схеме э.д.с. шумов E .) Учет шумов контуров не дает ничего принципиально нового.



Будем решать задачу методом, изложенным в работе [7]. В спектре случайной функции $E(t)$ существенны лишь ближайшие окрестности частот p и kp . Поэтому $E(t)$ можно считать равным

$$E(t) = E_1 \sin(pt + \varphi) + E_2 \cos(pt + \varphi) + E_3 \sin(kpt + \psi) + E_4 \cos(kpt + \psi),$$

где E_1, E_2, E_3 и E_4 — медленно меняющиеся функции времени.

Считая шумы δ коррелированными, получим

$$\overline{E_i(\tau) E_j(\tau_1)} = \begin{cases} P_{\text{ш}} \delta(\tau - \tau_1) & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Укороченные уравнения для схемы (см. рис. 1) имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{A}{Q_1} + \varepsilon_0 \sin \varphi + \frac{C_0}{C_1} E_2 \right\}, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{1}{2A} \left\{ \frac{2\Delta_1}{p} A - \varepsilon_0 \cos \varphi - \frac{1}{4} \beta \frac{C_0}{C_1} A^3 + \frac{C_0}{C_1} E_1 \right\}, \\ \dot{B} &= \frac{1}{2k} \left\{ -\frac{k^2 B}{Q_2} + \beta \frac{C_0}{C_2} \alpha_k A^k \sin(\psi - k\varphi) + \frac{C_0}{C_2} k^2 E_4 \right\}, \\ \dot{\psi} &= -\frac{1}{2kB} \left\{ \frac{2\Delta_2 k B}{p} - \beta \frac{C_0}{C_2} \alpha_k A^k \cos(\psi - k\varphi) + \frac{C_0}{C_2} k^2 E_3 \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где A и B — амплитуды напряжений в контурах; φ и ψ — фазы; Q_1 и Q_2 — добротности контуров; α_k — числовой множитель; производные взяты по безразмерному времени $\tau = pt$.

При выводе этих уравнений считалось, что переменная часть емкости связи в (5) много меньше постоянной. В этом же приближении с помощью метода, разработанного Р. В. Хохловым [6], из уравнений (6) можно найти стационарные амплитуды и фазы в обоих контурах:

$$\begin{aligned} A_0 &= \varepsilon_0 Q_1 \sin \varphi_0, & B_0 &= \frac{\alpha_k Q_2}{k^2} \beta \frac{C_0}{C_2} A_0^k \sin(\psi_0 - k\varphi_0), \\ \Delta_1 &= \frac{p \varepsilon_0 \cos \varphi_0}{2A_0}, & \Delta_2 &= \frac{\alpha_k p}{2k} \beta \frac{C_0}{C_2} \frac{A_0^k}{B_0} \cos(\psi_0 - k\varphi_0). \end{aligned}$$

Далее могут быть написаны уравнения для амплитудных и фазовых флуктуаций обоих контуров. Если оба контура настроены в резонанс $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то амплитудные и фазовые флуктуации не зависят друг от друга. Для интересующих нас малых фазовых флуктуаций в этом случае имеем

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{2Q_1} \varphi + \frac{1}{2} \frac{C_0}{C_1} \frac{E_1}{A_0},$$

$$\dot{\psi} = \frac{k^2}{2Q_2} \varphi - \frac{k}{2Q_2} \psi - \frac{k}{2} \frac{C_0}{C_2} \frac{E_3}{B_0}.$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2A_0} \frac{C_0}{C_1} \int_{-\infty}^{\tau} E_1(\theta) e^{-\frac{\tau-\theta}{2Q_1}} d\theta, \\ \psi &= -\frac{k}{2B_0} \frac{C_0}{C_2} \int_{-\infty}^{\tau} E_3(\theta) e^{-\frac{\tau-\theta}{2Q_2}} d\theta + \\ &+ \frac{k^2}{k - \frac{Q_2}{Q_1}} \frac{1}{2A_0} \frac{C_0}{C_1} \int_{-\infty}^{\tau} E_1(\theta) [e^{-\frac{\tau-\theta}{2Q_1}} - e^{-\frac{\tau-\theta}{2Q_2}}] d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда может быть найдена функция корреляции фазовых флуктуаций в выходном контуре

$$\begin{aligned} \overline{\psi(\tau)\psi(\tau_1)} &= \frac{k}{4} \left(\frac{C_0}{C_2} \right)^2 Q_2 \frac{p_{\text{ш}}}{B_0^2} e^{-\frac{k|\tau-\tau_1|}{2Q_2}} + \\ &+ \frac{k^3}{4} \frac{Q_1}{k^2 - \left(\frac{Q_1}{Q_2} \right)^2} \left(\frac{C_0}{C_1} \right)^2 \frac{p_{\text{ш}}}{A_0^2} \left[k e^{-\frac{|\tau-\tau_1|}{2Q_1}} - \frac{Q_2}{Q_1} e^{-\frac{k|\tau-\tau_1|}{2Q_2}} \right] \end{aligned}$$

и средний квадрат фазовых флуктуаций

$$\overline{\psi^2} = \frac{k}{4} \left(\frac{C_0}{C_2} \right)^2 Q_2 \frac{p_{\text{ш}}}{B_0^2} + \frac{k^3}{4} \frac{Q_1}{k + \frac{Q_1}{Q_2}} \left(\frac{C_0}{C_1} \right)^2 \frac{p_{\text{ш}}}{A_0^2}. \quad (7)$$

Первый член в правой части этого выражения связан с шумами выходного контура, а второй — с пересчитанными в выходной контур шумами входного контура. При пересчете в выходной контур флуктуации фазы входного контура увеличиваются в $\frac{k^3}{k + \frac{Q_1}{Q_2}}$ раз.

Однако из-за обычной в умножителях малости выходного сигнала по сравнению с входным в (7) нередко можно пренебречь флуктуациями, связанными с входным контуром.

В этом последнем случае легко получить спектральную плотность выходного сигнала:

$$g(\omega) = \frac{B_0^2}{2} e^{-\overline{\psi^2}} \delta(\omega - kp) + \frac{B_0^2}{\pi} e^{-\overline{\psi^2}} \int_0^{\infty} [e^{\overline{\psi(\tau)\psi(\tau+\theta)}} - 1] \cos k\theta \cos \frac{\omega}{p} \theta d\theta. \quad (8)$$

Выражение (8) показывает, что сигнал в выходном контуре представляет собой δ -функцию на частоте $\omega = kp$ и шум. Отношение мощности шума к мощности сигнала равно $1 - e^{-\overline{\psi^2}}$. Если эта величина много меньше единицы, то из (8) может быть найдена спектральная плотность шума:

$$g_{\text{ш}}(\omega) \approx \frac{(kp)^2}{16\pi} \left(\frac{C_0}{C_2} \right)^2 \frac{p_{\text{ш}}}{\left(\frac{kp}{2Q_2} \right)^2 + (kp - \omega)^2}.$$

Полученный результат (независимость ширины спектральной линии от собственных шумов умножителя) связан с предположением о малости шумов. Ситуация здесь вполне аналогична той, которая имеет место при захватывании генератора внешней силой [7, 8]. Малые собственные шумы приводят лишь к дрожанию фазы вблизи стационарного значения. Отсутствие диффузии фазы означает и отсутствие расширения спектральной линии. При достаточно большом уровне шумов становятся возможными перескоки фазы на целое число периодов. Это приводит к появлению диффузии фазы и расширению спектральной линии за счет собственных шумов умножителя. Такой процесс можно исследовать, отказавшись от линеаризации уравнений для фазовых флуктуаций. Однако даже без исследования ясно, что спектральная линия шумящего умножителя при достаточно стабильном входном сигнале много уже, чем у автономного генератора с тем же отношением сигнала к шуму.

Выводы

При умножении частоты происходит расширение спектральной линии сигнала за счет его нелинейного преобразования.

Естественная ширина спектральной линии увеличивается при умножении в k^2 раз, а техническая в k раз, где k — кратность умножения частоты.

Малые собственные шумы умножителя частоты не приводят к расширению спектральной линии, а лишь ухудшают отношение сигнала к шуму на выходе умножителя.

В фазовых флуктуациях выходного сигнала умножителя обычно основную роль играют шумы на частоте kp , а не шумы входного контура.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн И. Л. «Изв. АН СССР», сер. физическая, 14, № 2, 145, 1950.
2. Бернштейн И. Л. ЖТФ, 11, № 4, 305, 1941.
3. Троицкий В. С. «Радиотехника и электроника», 1, № 6, 818, 1956.
4. Малахов А. Н. ЖЭТФ, 30, № 5, 884, 1956.
5. Малахов А. Н. «Радиотехника и электроника», 2, № 10, 1295, 1957.
6. Хохлов Р. В. Докторская диссертация. МФТИ, М., 1962.
7. Рытов С. М. ЖЭТФ, 29, № 3, 304, 1955.
8. Стратонович Р. Л. «Радиотехника и электроника», 3, № 4, 497, 1958.

Поступила в редакцию
20. 12 1962 г.

Кафедра
теории колебаний.