

## Оценка частот и добротностей низкочастотных тороидальных мод собственных колебаний Земли по деформографическим данным

А.Е. Ольшанский,<sup>1</sup> М.П. Виноградов,<sup>1,\*</sup> В.К. Милуков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга (ГАИШ МГУ)  
Россия, 119234 Москва, Университетский пр-т, 13

(Поступила в редакцию 26.06.2023; после доработки 14.07.2023; принята к публикации 23.07.2023)

В работе выполнены оценки параметров трёх низкочастотных тороидальных мод  ${}_0T_2$ ,  ${}_0T_3$  и  ${}_0T_4$ , возбужденных 13 крупнейшими землетрясениями XXI века. Оценки получены по данным Баксанского лазерного интерферометра-деформографа ГАИШ МГУ. С использованием адаптивного спектрального алгоритма получены оценки частот мод, выполнено их сравнение с моделью PREM. Найдены достоверно значимые отклонения оценок частот моды  ${}_0T_4$  для ряда землетрясений, показана их возможная связь с локальными неоднородностями значений скорости поперечных волн и плотности Земли в верхней мантии. Изучено расщепление моды  ${}_0T_2$  из-за эллиптичности и вращения Земли, получены оценки частот синглетов, возбужденных после катастрофических землетрясений на Суматре, в Японии и Чили. Выполнена оценка добротностей низкочастотных тороидальных мод тремя различными способами.

PACS: 91.35.-x. УДК: 550.344.

Ключевые слова: собственные колебания Земли, тороидальные моды, расщепление, добротность моды, землетрясения, лазерный интерферометр-деформограф.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.78.2350902](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.78.2350902)

### ВВЕДЕНИЕ

Земля как тело конечных размеров имеет набор дискретных собственных частот, на которых происходят её колебания. Такие колебания называются нормальными модами или собственными колебаниями Земли (СКЗ), а соответствующие им частоты — собственными. Одной из наиболее часто используемых моделей Земли является модель PREM (Preliminary Reference Earth Model) [1] — сферически-симметричная, невращающаяся, неупругая модель Земли, которая в изотропном варианте содержит пять величин, являющихся функциями расстояния от центра Земли: плотность  $\rho$ , модули сжатия  $\kappa$  и сдвига  $\mu$ , а также их диссипативные функции  $Q_\kappa$  и  $Q_\mu$ . Наблюдения частот и добротностей мод СКЗ позволяют решать обратную задачу физики Земли — выполнять оценку параметров, описывающих внутреннее строение нашей планеты [2].

Существуют два типа колебаний СКЗ — сфероидальные и тороидальные. Сфероидальные моды  ${}_nS_l$  изменяют внешнюю форму и внутреннюю плотность Земли; тороидальные моды  ${}_nT_l$  связаны с чисто тангенциальными смещениями — не изменяют форму и не влияют на радиальное распределение плотности.

СКЗ в модели PREM являются вырожденными — решения для каждого углового индекса  $l$  имеют  $2l + 1$  мод с одинаковой частотой и собственной функцией. Вращение Земли, неоднородность

её внутреннего строения и отклонение от сферической формы (в частности, эллиптичность) приводят к снятию вырождения — каждая из мод  ${}_nS_l$  и  ${}_nT_l$  представляет собой мультиплет, содержащий  $2l + 1$  различных колебаний.

Источником возбуждения СКЗ являются крупные землетрясения с магнитудой не менее 6–7. В силу наличия неупругости происходит поглощение энергии мод, показателем которого является добротность.

Большинство наблюдений СКЗ сделаны с помощью широкополосных сейсмометров или сверхпроводящих гравиметров [3–5]. Основное достоинство таких наблюдений — наличие большого числа действующих приборов в разных регионах Земли, делающих возможным суммирование большого числа сигналов и изучение их географических особенностей. Однако наблюдение тороидальных мод достаточно проблематично, так как гравиметры регистрируют только вертикальные ускорения, а для горизонтальных каналов сейсмометров характерно присутствие значительного сейсмического шума. Для низкочастотных мод (менее 1 мГц) ситуация ухудшается с падением амплитудно-частотной характеристики сейсмометров.

Изложенные особенности объясняют тот факт, что за прошедшие сорок с небольшим лет после статьи А. Дзевонского и Д. Андерсона, в которой была предложена модель Земли PREM [1], были опубликованы лишь четыре работы [6–9], в которых приводятся оценки параметров низкочастотных тороидальных мод СКЗ, и только в двух из них есть оценки добротностей. Также можно отметить изу-

\* E-mail: [vinogradovmp@my.msu.ru](mailto:vinogradovmp@my.msu.ru)

чение амплитуд тороидальных мод после землетрясения на Суматре 2004 г. по данным итальянского деформографа в Гранзасе [10] и спектральные наблюдения тороидальных мод, возбужденных японским землетрясением 2011 г., с помощью кольцевого лазерного интерферометра [11]; однако в этих публикациях оценки частот и добротностей мод отсутствуют.

Цель данной работы — оценка частот и добротностей низкочастотных тороидальных мод собственных колебаний Земли, возбужденных крупнейшими землетрясениями последних 20 лет, по данным длиннобазового лазерного интерферометра-деформографа ГАИШ МГУ, установленного в подземной обсерватории в Баксанском ущелье на Северном Кавказе.

### 1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

В работе использовались деформационные записи землетрясений, полученные из банка данных лаборатории лазерной интерферометрии ГАИШ МГУ. Баксанская станция ГАИШ оснащена длиннобазовым лазерным интерферометром-деформографом, который размещён в подземной штольне Баксанской нейтринной обсерватории Института ядерных исследований РАН. Деформограф расположен на расстоянии 650 м от входа в штольню, на глубине 400 м ниже уровня поверхности Земли. Координаты деформографа: широта  $43^{\circ} 16'$ , долгота  $42^{\circ} 41'$ . Азимут главного измерительного плеча составляет угол  $150^{\circ}$ .

Баксанский лазерный интерферометр-деформограф представляет собой классический двухпроходный неравноплечий интерферометр Майкельсона, принцип работы которого состоит в сравнении оптической длины (т.е. длины, выраженной в терминах длины волны света) большого измерительного плеча ( $L = 75$  м) и короткого опорного плеча. Инструмент регистрирует относительную деформацию  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ , измеряемую в относительных единицах — стрейнах. Баксанский лазерный интерферометр-деформограф имеет высокую чувствительность (инструментальная разрешающая способность к измерениям деформаций  $2 \times 10^{-13}$  стрейн), широкий частотный диапазон (от сверхнизких частот  $10^{-8}$  Гц до 1 кГц) и практически неограниченный динамический диапазон. Детальное описание прибора приведено в [12]. Полученные на интерферометре деформационные данные использовались для оценки частот различных СКЗ [13–16].

В настоящей работе в качестве источников возбуждения мод СКЗ использовались 13 крупнейших землетрясений с магнитудой более 8, произошедших с 2004 г. — с начала работы Баксанского деформографа в режиме непрерывного мониторинга. Даты и магнитуды землетрясений приведены в табл. 1.

### 2. ОЦЕНКА ЧАСТОТ ПЕРВЫХ ТРЁХ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ МОД

Для оценки частот мод СКЗ использовался классический метод спектрального оценивания на основе периодограмм Уэлча с окном Ханна. Оптимальной длительностью для спектрального оценивания конкретной длиннопериодной моды является интервал наблюдения порядка 30 ч [13]. Пример спектра мощности для первого 30-часового интервала после землетрясения в Японии 2011 г. приведён на рис. 1 в диапазоне частот 0.3–1 мГц. Начало этого диапазона соответствует самой низкочастотной моде СКЗ  ${}_0S_2$ .

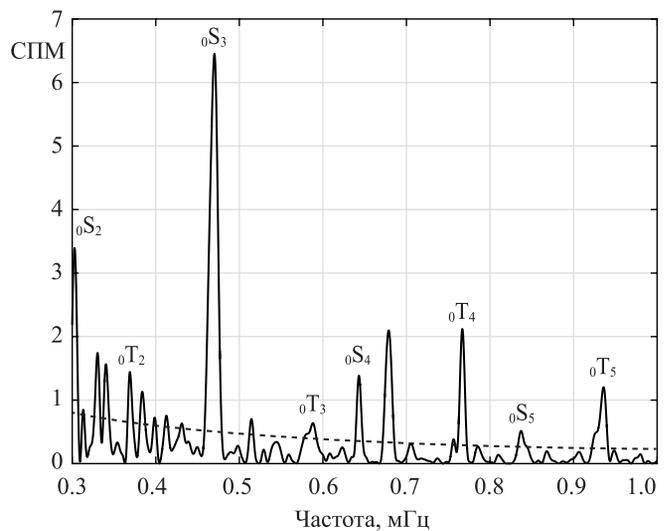


Рис. 1. Спектральная плотность мощности (СПМ) низкочастотных СКЗ, возбуждённых землетрясением в Японии 2011 г., в  $10^{-16}$  стрейн<sup>2</sup>/Гц. Пунктирной линией показан уровень шума

Для определения частот и их погрешностей по построенным спектрам использовался адаптивный спектральный алгоритм, позволяющий осуществить устойчивую к виду помехи оценку неизвестных параметров геофизического сигнала [17]. В соответствии с данным алгоритмом оценка резонансной частоты спектрального пика может быть определена по формуле

$$\hat{\omega} = \omega_0 + \delta_0 \left( \frac{N(\omega_0 + \delta_0)}{N(\omega_0)} - \frac{N(\omega_0 - \delta_0)}{N(\omega_0)} \right), \quad (1)$$

где  $N$  — спектральная плотность мощности данного пика,  $\omega_0$  и  $\delta_0$  — начальные значения частоты и полуширины спектрального пика, определяемые из условий

$$N(\omega_0) = \max_{\omega} N(\omega), \quad N(\omega_0 \pm \delta_0) = \frac{1}{2} N(\omega_0).$$

Дисперсия оценки частоты определяется полушириной спектрального пика  $\delta_0$  и отношением спек-

тральной плотности сейсмического шума в отсутствии геофизического сигнала  $N_n$  к  $N(\omega_0)$

$$D_\omega = \frac{\delta_0^2}{N(\omega_0)} (N_n(\omega_0 + \delta_0) + N_n(\omega_0 - \delta_0)) \approx \approx \delta_0^2 \frac{2N_n(\omega_0)}{N(\omega_0)}. \quad (2)$$

Уровень шума  $N_n$  имеет характерную зависимость  $1/\omega$ , которая определялась по общему спектру в широком диапазоне аппроксимацией методом наименьших квадратов (МНК).

Определённые по формулам (1) и (2) частоты и погрешности мод  ${}_0T_2$ ,  ${}_0T_3$  и  ${}_0T_4$  по всем 13 землетрясениям приведены в табл. 1.

Приведённые в табл. 1 оценки имеют разную погрешность, т.к. амплитуды возбуждения мод и сейсмические шумы различны. Поэтому в качестве оценок по всему набору землетрясений были использованы средневзвешенные значения (весовые коэффициенты равны обратным дисперсиям). Они приведены для всех трёх мод в табл. 2 вместе с оценками других исследователей и с теоретическими значениями по модели PREM.

При сравнении результатов табл. 1 и 2 следует иметь в виду, что меньшая погрешность, указанная в ряде работ, является следствием усреднения записей большого числа станций сейсмических сетей (от нескольких десятков до полутора сотен), в то время как наши оценки сделаны по единичным наблюдениям на одном приборе.

### 3. ОЦЕНКА РАСЩЕПЛЕНИЯ МОДЫ ${}_0T_2$

Вследствие вращения и несферичности реальной Земли каждая наблюдаемая сфероидальная и тороидальная мода является мультиплетом и распадается на  $2l + 1$  синглетов. Наблюдаемый эффект математически подобен эффекту Зеемана (расщеплению вырожденных энергетических уровней атома водорода в магнитном поле).

Теоретически частоты синглетов в мультиплете могут быть описаны следующим выражением [18]:

$$f_m = f_d (1 + a + bm + cm^2), \quad m \in [-l, l],$$

где  $f_d$  — частота вырожденной (нерасщеплённой) моды, параметр расщепления  $b$  зависит от скорости вращения Земли (эффект силы Кориолиса первого порядка), параметры  $a$  и  $c$  — от несферичности Земли (эллиптического сжатия) и эффекта силы Кориолиса второго порядка.

Таким образом, наиболее длиннопериодная тороидальная мода СКЗ  ${}_0T_2$  расщепляется на 5 синглетов. Расщепление моды  ${}_0T_2$  удалось наблюдать на интервале длиной более 500 ч от начала трех крупнейших землетрясений (Суматра 2004 г., Япония 2011 г. и Чили 2010 г.). Пример расщепления моды, возбуждённой японским землетрясением, приведён на рис. 2.

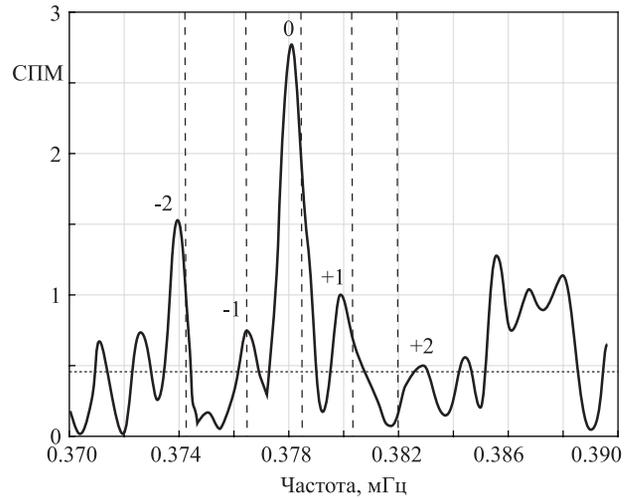


Рис. 2. Расщепление моды  ${}_0T_2$ , возбуждённой японским землетрясением 2011 г. СПМ приведена в  $10^{-16}$  стрейн<sup>2</sup>/Гц. Вертикальными пунктирными линиями обозначены теоретические значения частот синглетов по модели PREM, горизонтальной линией — оценка уровня шума

В табл. 3 приведены результаты расщепления моды  ${}_0T_2$  на синглеты по крупнейшим землетрясениям.

### 4. ОЦЕНКА ДОБРОТНОСТЕЙ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ МОД

СКЗ являются затухающими колебаниями, поэтому в зависимости от времени, прошедшего после начала землетрясения, амплитуда моды будет уменьшаться. В настоящей работе используются три различных метода оценки добротности: по уменьшению амплитуды спектральных пиков, по огибающей деформационного сигнала и параметрический метод, основанный на сравнении наблюдаемого сигнала с теоретическим по МНК.

Наиболее очевидный метод определения добротности мод СКЗ связан с оценкой изменения амплитуды спектральных пиков с течением времени. Для получения временной зависимости спектральное оценивание выполняется в скользящем окне, сдвигающемся от начала землетрясения. Пример такой зависимости в логарифмическом масштабе для землетрясения в Японии 2011 г. показан на рис. 3.

Логарифм полученной зависимости амплитуды от времени аппроксимируется прямой, в этом случае добротность моды может быть определена через коэффициент наклона  $a_1$  по формуле  $Q = 2\pi f/a_1$ .

Такой алгоритм был применён к моде  ${}_0T_4$ , выделенной во всех указанных ранее 13-ти землетрясениях (табл. 1), в результате получена следующая итоговая усреднённая по всем событиям оценка:

Таблица 1. Частоты тороидальных мод, определённые по разным землетрясениям

№ п/п	Землетрясение	Дата	Mw	Частота, мГц		
				${}_0T_2$	${}_0T_3$	${}_0T_4$
1	Суматра	26.12.2004	9.1	$0.378 \pm 0.019$	$0.59 \pm 0.04$	$0.7651 \pm 0.0007$
2	Япония	11.03.2011	9.0	$0.38 \pm 0.03$	$0.583 \pm 0.016$	$0.766 \pm 0.009$
3	Чили	27.02.2010	8.8	$0.38 \pm 0.16$	$0.587 \pm 0.005$	$0.7544 \pm 0.0018$
4	Суматра	11.04.2012	8.6	$0.38 \pm 0.04$	$0.58 \pm 0.01$	$0.7658 \pm 0.0016$
5	Индонезия	28.03.2005	8.6	$0.38 \pm 0.02$	$0.578 \pm 0.023$	$0.7711 \pm 0.0029$
6	Индонезия	09.12.2007	8.4	$0.382 \pm 0.006$	$0.5862 \pm 0.0029$	$0.7714 \pm 0.0018$
7	Курильские острова	15.11.2006	8.3	$0.377 \pm 0.004$	$0.592 \pm 0.016$	$0.794 \pm 0.003$
8	Чили	16.09.2015	8.3	$0.3787 \pm 0.0028$	$0.584 \pm 0.006$	$0.7761 \pm 0.0016$
9	Чили	01.04.2014	8.2	$0.378 \pm 0.007$	$0.59 \pm 0.01$	$0.758 \pm 0.004$
10	Фиджи	19.08.2018	8.2	$0.377 \pm 0.004$	$0.592 \pm 0.009$	$0.7612 \pm 0.0017$
11	Курильские острова	13.01.2007	8.1	$0.375 \pm 0.005$	$0.583 \pm 0.003$	$0.7704 \pm 0.0011$
12	Маккуори	23.12.2004	8.1	$0.378 \pm 0.007$	$0.586 \pm 0.004$	$0.768 \pm 0.004$
13	Соломоновы острова	01.04.2007	8.1	$0.3800 \pm 0.0006$	$0.5862 \pm 0.0014$	$0.7791 \pm 0.0015$

Таблица 2. Средневзвешенные оценки тороидальных мод по всем землетрясениям в сравнении с теоретическими значениями модели PREM и результатами других исследователей

Источник	Частота, мГц		
	${}_0T_2$	${}_0T_3$	${}_0T_4$
Теория (PREM)	379.16	586.16	765.66
Dziewonsky & Anderson, 1981 [1]	$379.3 \pm 0.3$	$586.2 \pm 0.9$	$765.7 \pm 0.5$
Widmer et al, 1992 [3]	$377.3 \pm 0.8$	$587.6 \pm 0.7$	$766.9 \pm 0.4$
Okal & Stein, 2009 [4]	$379.9 \pm \text{н.д.}$	$587.2 \pm \text{н.д.}$	$766.9 \pm \text{н.д.}$
Roult, 2010 [5]	$379.8 \pm 0.4$	н.д.	н.д.
Chao & Ding, 2014 [6]	$379.3 \pm 0.1$	$586.8 \pm 0.1$	н.д.
Данная работа	$378.2 \pm 2.1$	$586.3 \pm 2.9$	$768 \pm 7$

Примечание: н.д. — нет данных

$Q = 208 \pm 26$ . В качестве погрешности использовано среднеквадратическое отклонение для оценок отдельных землетрясений. Полученная добротность в пределах погрешности совпадает с теоретическим значением по модели PREM ( $Q = 228$ ).

Из-за особенностей расщепления (модуляции амплитуды моды по причине биения близких частот ее синглетов) зависимость амплитуды моды от времени может отличаться от экспоненциальной. Это видно и на рис. 3, однако модуляция не так велика и не мешает оценке добротности. Анализ спектров мод  ${}_0T_2$  и  ${}_0T_3$  показал, что для этих мод модуляция выражена значительно сильнее. Для оценки добротности сильно модулированных зависимостей вместо спектрального оценивания удобнее перейти во временное представление и использовать огибающую исходного сигнала. Для её построения можно воспользоваться преобразованием Гильберта, предварительно отфильтровав сигнал в узком диапазоне частот полосовым фильтром (рис. 4).

Для оценки добротности, как и в предыдущем способе, используется аппроксимация линейного участка спада логарифма огибающей. Данный способ позволил сделать оценку добротности для всех трёх низкочастотных мод после крупнейших землетрясений, они приведены в табл. 4.

Суть параметрического метода оценки добротности заключается в сравнении огибающей наблюдаемого сигнала с теоретической огибающей при заданной добротности. При такой оценке для мультиплета строится синтетический сигнал — волновая форма моды, которая зависит от координат и тензора сейсмического момента землетрясения, а также от координат и ориентации измерительного плеча деформографа. Для расчёта синтетического сигнала использовалась теория возбуждения СКЗ, подробно изложенная в [18, 19]. Пример рассчитанного для Баксанского деформографа теоретического сигнала моды  ${}_0T_3$  приведен на рис. 5. Хорошо видно, что сигналы сильно модулированы, причём

Таблица 3. Оценки частот синглетов моды  ${}_0T_2$ 

Синглет	Теор. значение (PREM)	Частота, мГц		
		Суматра-2004	Япония-2011	Чили-2010
${}_0T_2^{-2}$	0.37429	$0.3748 \pm 0.0011$	$0.3740 \pm 0.001$	$0.3741 \pm 0.0012$
${}_0T_2^{-1}$	0.37648	$0.3761 \pm 0.0016$	$0.3766 \pm 0.0009$	$0.3766 \pm 0.0023$
${}_0T_2^0$	0.37849	$0.3792 \pm 0.0015$	$0.3781 \pm 0.0017$	$0.3780 \pm 0.0006$
${}_0T_2^1$	0.38034	$0.3807 \pm 0.0011$	$0.37990 \pm 0.0008$	$0.3794 \pm 0.0014$
${}_0T_2^2$	0.38200	$0.3827 \pm 0.0009$	$0.3830 \pm 0.001$	$0.3813 \pm 0.0017$

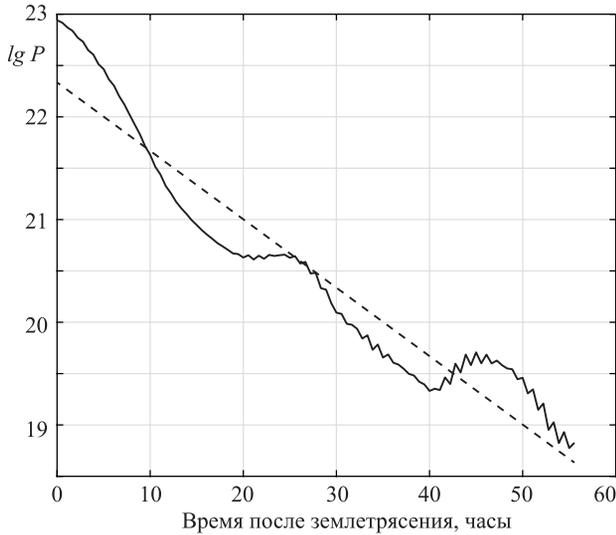


Рис. 3. Затухание моды  ${}_0T_4$  после японского землетрясения 2011 г. Сплошной линией показан логарифм спектральной плотности мощности максимума моды в условных единицах, пунктиром — ее аппроксимация линейной функцией

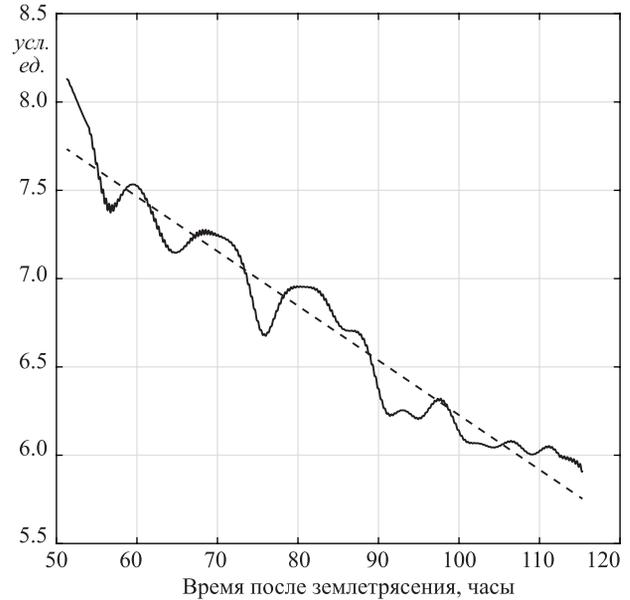


Рис. 4. Затухание моды  ${}_0T_2$  после землетрясения на Суматре 2004 г. Сплошной линией показан логарифм огибающей деформации в условных единицах, пунктиром — ее аппроксимация линейной функцией

Таблица 4. Оценка добротностей мод  ${}_0T_2$  и  ${}_0T_3$  по огибающей сигнала

Мода	$Q$ (оценка)	$Q$ (PREM)
${}_0T_2$	$306 \pm 46$	250
${}_0T_3$	$282 \pm 76$	240
${}_0T_4$	$268 \pm 74$	228

по-разному для разных мод, а зависимость их затухания от времени значительно отличается от экспоненциальной.

Для оценки добротности огибающая синтетического сигнала строится для некоторого диапазона значений параметра  $Q$  и из полученного семейства кривых выбирается наиболее подходящая наблюдаемому сигналу в квадратичном смысле: выбирается то значение добротности, которое соответствует минимуму суммы квадратов невязок с реальными деформационными данными.

На рис. 6 показаны огибающие наблюдаемых данных и синтетических сигналов с разными значени-

ями добротности  $Q$  для моды  ${}_0T_2$  и  ${}_0T_3$  после землетрясения в Японии (2011 г.).

Результаты оценок, полученных параметрическим методом, приведены в табл. 5.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Средневзвешенные оценки частот мод, усреднённые по всем землетрясениям, в пределах погрешностей соответствуют модели PREM. Однако более детальный анализ полученных результатов по отдельным событиям позволяет выявить важную особенность. На рис. 7 графически представлены оценки частот для всех 13 землетрясений. С ростом углового номера моды  $l$  погрешность в определении частоты моды по отдельным землетрясениям уменьшается: например, средняя погрешность для  ${}_0T_2$  составила 23 мГц, в то время как для  ${}_0T_3$  — всего лишь 2.7 мГц.

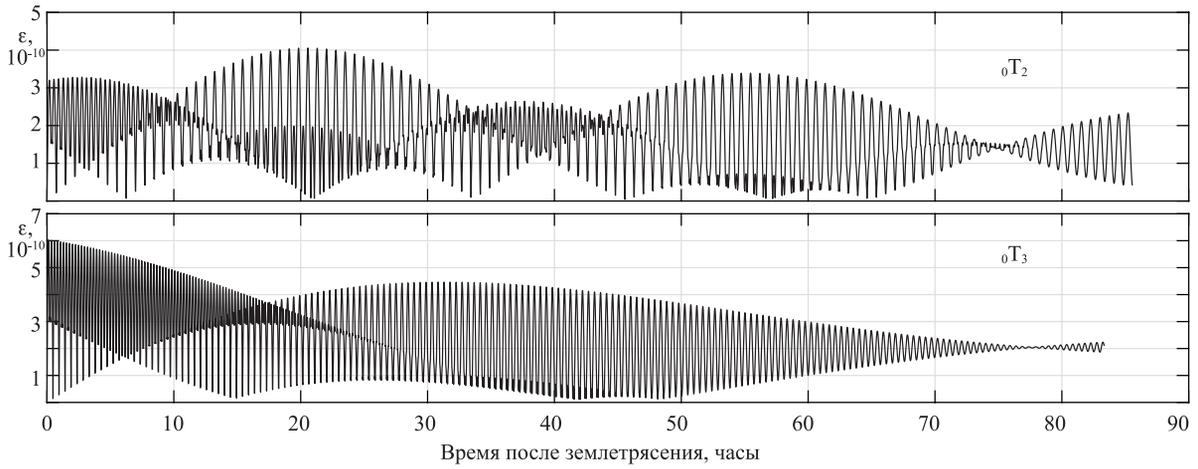


Рис. 5. Теоретический сигнал (абсолютное значение деформации в стрейнах) возбуждения мод  ${}^0T_2$  (вверху) и  ${}^0T_3$  (внизу) для землетрясения в Японии 2004 г. Добротности мод, использованные при расчёте, взяты по модели PREM (250 и 240 единиц соответственно)

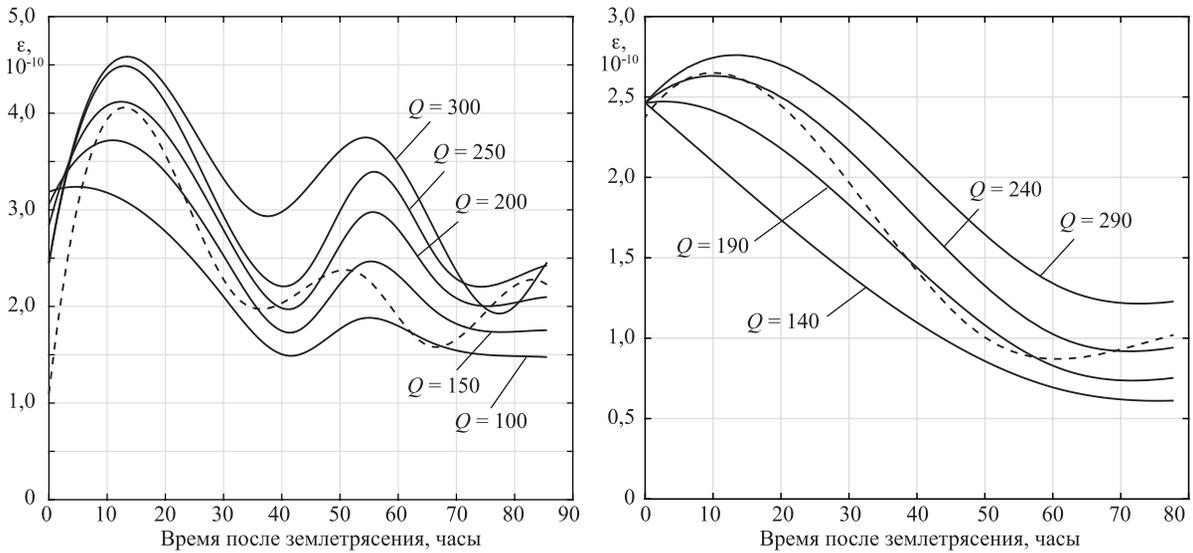


Рис. 6. Наблюдаемые огибающие деформации (пунктирные линии) мод  ${}^0T_2$  (слева) и  ${}^0T_3$  (справа), возбужденных землетрясением в Японии 2011 г., и соответствующие синтетические кривые этой моды для различных значений добротности

Для мод  ${}^0T_2$  и  ${}^0T_3$  отклонение оценок от PREM не существенно. Для моды  ${}^0T_4$  отклонения частот от PREM и друг от друга для некоторых землетрясений превышают погрешности, т.е. различия в оценках их частотах можно считать значимыми. Подобные отличия в частотах одной и той же моды СКЗ для разных событий нуждаются в отдельном исследовании, т.к. не могут быть объяснены в рамках модели PREM. Чтобы локализовать возможные отклонения по расстоянию от центра Земли, можно воспользоваться аппаратом так называемых ядер Фреше, описывающих меру чувствительности изменения частоты моды при изменении параметров модели. Следуя [18], возмущение частоты тороидальной моды  $\delta\omega$  можно выразить через возмущения модуля сдвига  $\delta\mu$  и плотности  $\delta\rho$  в виде:

$$\delta\omega = \int_{R_0}^R (\delta\mu K_\mu + \delta\rho K_\rho) dr,$$

где  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота моды;  $K_\mu = \frac{1}{2\omega} \left[ (r\dot{W} - W)^2 + (k^2 - 2) W^2 \right]$ ,  $K_\rho = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 W^2$  — ядра Фреше для модуля сдвига и плотности соответственно;  $R_0$  и  $R$  — радиусы внешнего ядра и поверхности Земли;  $W \equiv {}_nW_l(r)$  и  $\dot{W} \equiv \frac{d}{dr} {}_nW_l(r)$  — собственная функция тороидальной моды и её производная по радиусу соответствующих индексов  $n$  и  $l$ ,  $k = \sqrt{l(l+1)}$ .

Для тороидальных мод ключевым параметром является скорость поперечных волн  $\beta$ , поэтому от ядра  $K_\mu$  лучше перейти к ядру  $K_\beta$ , воспользовав-

Таблица 5. Оценка добротностей мод  ${}_0T_2$  и  ${}_0T_3$  параметрическим методом

Мода	Япония, 2011 г.	Суматра, 2004 г.	Чили, 2010 г.
${}_0T_2$	$260 \pm 126$	$150 \pm 105$	$190 \pm 86$
${}_0T_3$	$210 \pm 42$	$230 \pm 77$	$410 \pm 130$

Таблица 6. Сравнение оценок добротностей мод разными методами

Метод оценки	Добротность		
	${}_0T_2$	${}_0T_3$	${}_0T_4$
Затухание спектрального пика	-	-	$208 \pm 26$
Огибающая отфильтрованного сигнала	$306 \pm 46$	$282 \pm 76$	$268 \pm 74$
Сравнение с синтетическим сигналом	$200 \pm 106$	$283 \pm 83$	-
Теоретическое значение (PREM)	250	240	228
Widmer et al., 1992 [6]	-	$222 \pm 56$	$265 \pm 26$
Chao & Ding, 2014 [9]*	$240 \pm 20$	$245 \pm 40$	-

\*значения рассчитаны через средние значения добротности отдельных синглетов мод

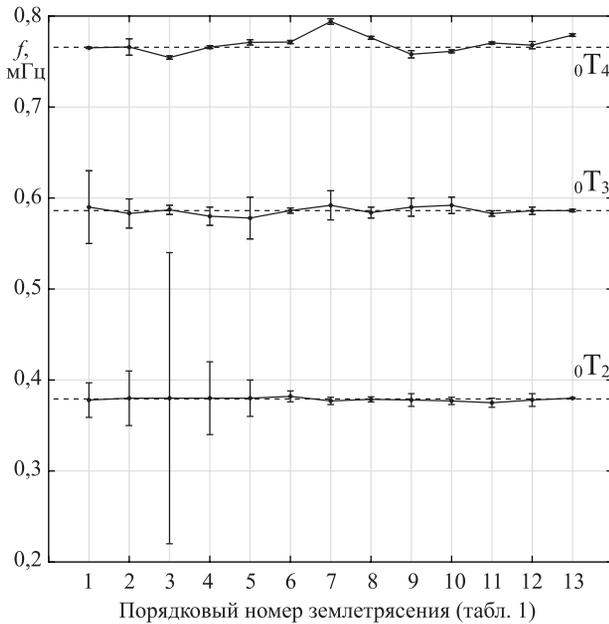


Рис. 7. Оценки частот мод  ${}_0T_2$ ,  ${}_0T_3$  и  ${}_0T_4$ , возбужденной 13 землетрясениями. Пунктиром показаны теоретические значения по PREM

пись приведенной в [18] формулой

$$\mu = \delta\rho\beta^2 + 2\rho\beta\delta\beta.$$

Тогда

$$K_\beta = 2\rho\beta K_\mu = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)_\rho,$$

$$K'_\rho = \beta^2 K_\mu + K_\rho = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)_\beta,$$

где нижние индексы указывают переменные, которые остаются фиксированными во время дифференцирования.

На рис. 8 изображены радиальные зависимости ядер Фреше от расстояния от центра Земли для моды  ${}_0T_4$ .

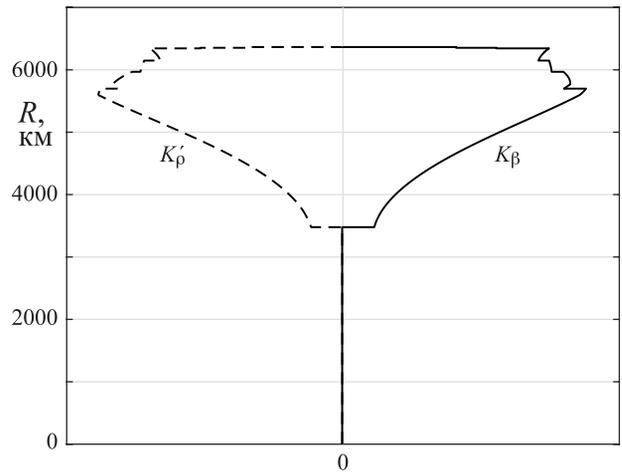


Рис. 8. Ядра Фреше для моды  ${}_0T_4$  в зависимости от расстояния от центра Земли. Масштаб по оси абсцисс условный

Из графика следует, что причиной отклонения частоты моды  ${}_0T_4$  от PREM в большую сторону могут быть большие значения скорости волн сдвига и/или меньшие значения плотности в верхней мантии Земли. Однако вопрос о том, почему эти отклонения наблюдаются только для отдельных событий (в наибольшей степени — для землетрясения 2006 г. на Курильских островах) остаётся открытым. Возможно этот факт может быть связан

с зависимостью функции расщепления моды от локальных неоднородностей ([20, 21]), приводящей к смещению частот отдельных синглетов и, как следствие, к смещению частоты максимума спектральной плотности мультиплета моды.

Полученные оценки добротностей мод всеми тремя методами в пределах погрешностей совпадают с PREM и результатами других исследователей (табл. 6).

Следует отметить сложность определения добротностей для тороидальных мод: относительно быстрое их затухание и наличие сейсмических шумов не позволяет сделать высокоточную оценку по единичным измерениям даже такого чувствительного прибора, как длинноволновый деформограф. Из трёх использованных методов оценки добротностей наиболее точные результаты даёт определение по амплитудам спектральных пиков, однако он годится только для мод, затухание которых имеет выраженный экспоненциальный характер. Для большинства землетрясений и СКЗ сигнал имеет гораздо более сложную, глубоко модулированную зависимость от времени. Для таких сигналов необходимо применять параметрический метод, однако он даёт достаточно большую погрешность. Тем не менее этот метод является перспективным ввиду его универсальности. Возможным направлением его улучшения является переход от оценок по МНК к оценкам по методу максимального правдоподобия, учитывающему свойства и оцениваемого сигнала, и сейсмического шума.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнены оценки параметров трёх низкочастотных фундаментальных тороидальных мод  ${}_0T_2$ ,  ${}_0T_3$  и  ${}_0T_4$ , возбужденных 13 крупнейшими

землетрясениями XXI века. Впервые для оценок добротностей были использованы деформационные данные, полученные на Баксанском длинноволновом лазерном интерферометре-деформографе.

Для определения частот мод использовался спектральный анализ (метод периодограмм Уэлча), оценка резонансных частот и их погрешностей осуществлялась адаптивным спектральным алгоритмом с учётом величины сейсмического шума. Найденные значения частот мод  ${}_0T_2$  и  ${}_0T_3$  в пределах погрешностей совпадают с PREM.

Анализ моды  ${}_0T_4$  выявил значимое отклонение оценок её частоты, полученных для возбуждения мод после землетрясений в Чили (2010 г.), на Курильских островах (2006 г.) и на Соломоновых островах (2007 г.), от теоретической частоты моды по модели PREM. Показано, что подобное отклонение может быть связано с локальными неоднородностями верхней мантии Земли, а именно по причине более высоких значений скорости сдвига и/или меньших значений плотности в соответствующих регионах.

Изучено расщепление моды  ${}_0T_2$  из-за несферичности и вращения Земли. Получены оценки частот синглетов моды, возбужденной катастрофическими землетрясениями на Суматре, в Японии и Чили. Отклонения параметров расщепления  ${}_0T_2$  от модели PREM в пределах погрешностей не обнаружено.

Выполнена оценка добротностей мод тремя различными способами. Полученные оценки добротностей совпадают с моделью PREM.

Показана перспективность использования длинноволнового лазерного интерферометра-деформографа как эффективного и универсального инструмента для изучения СКЗ.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 23-27-00237.

- [1] *Dziewonski A.M., Anderson, D.L.* // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. **25**, N 4. 297. (1981).
- [2] *Жарков В.Н.* Собственные колебания Земли и планет. Москва.: ОИФЗ РАН, 2003.
- [3] *Majstorović, J., Rosat, S., Lambotte S., Rogister Y.* // *Geophysical Journal International*. **216**, Iss. 2. 1157. (2019). DOI: 10.1093/gji/ggy483
- [4] *Talavera-Soza S., Deuss A.* // *Geophysical Journal International*. **224**, Iss. 2. 1211. (2021). DOI: 10.1093/gji/ggaa499
- [5] *Ringler A.T., Anthony R.E., Aster R.C.* et al. // *Reviews of Geophysics*. 1. (2022).
- [6] *Widmer R., Zurn W., Masters G.* // *Geophysical Journal International*. **111**, N 2. 226. (1992).
- [7] *Okal E.A., Stein S.* // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. **175**. 53. (2009).
- [8] *Roult G., Roch J., Clevede E.* // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. **179**. 45. (2010).
- [9] *Chao B.F., Ding H.* // *Geophys. Res. Lett.* **41**. 5428. (2014).
- [10] *Park J., Crescentini A.A., Boschi E.* // *Geophysical Journal International*. **173**. 887. (2008).
- [11] *Igel H., Nader M., Kurrle D.* et al. // *Geophysical Research Letters*. **38**. L21303. (2011).
- [12] *Миллоков В.К., Клячко Б.С., Мясников В.А.* и др. // Приборы и техника эксперимента. № 6. 87. (2005). (*Milyukov V.K., Klyachko B.S., Myasnikov A.V.* et al. // *Instruments and Experimental Techniques*. **48**, N 6. 780. (2005).)
- [13] *Миллоков В.К., Виноградов М.П., Миронов А.П.* и др. // *Физика Земли*. № 2. 21. (2015). (*Milyukov V.K., Vinogradov M.P., Mironov A.P.* et al. // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. **51**, N 2. 176. (2015))
- [14] *Миллоков В.К., Виноградов М.П., Миронов А.П., Мясников А.В.* // *Геофизические процессы и биосфера*. **17**, № 4. 127. (2018). (*Milyukov V.K., Vinogradov M.P., Mironov A.P.* et al. // *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*. **54**, N 11, 1595. (2018).)
- [15] *Миллоков В.К., Виноградов М.П., Миронов А.П., Мясников А.В.* // *Геофизические процессы и био-*

- сфера. **19**, № 4. 143. (2020). (Milyukov V.K., Vinogradov M.P., Mironov A.P. et al. // *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*. **56**, N 11. 1447. (2020).)
- [16] Миллюков В.К., Виноградов М.П., Миронов А.П., Мясников А.В. // *Физика Земли*. № 6. 11. (2020). (Milyukov V.K., Vinogradov M.P., Mironov A.P. et al. // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. **56**, N 6. 737. (2020).)
- [17] Гусев А.В., Козырева А.В., Миллюков В.К. // *Измерительная техника*. № 5. 5. (2002).
- [18] Dahlen F., Tromp J. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, 1998. 1026 с.
- [19] Аки К., Ричардс П. *Количественная сейсмология. Теория и методы*. М.: Мир, 1983.
- [20] Tromp J., Zankerka E. // *Geophysical Research Letters*. **22**, N 16. 2297. (1995).
- [21] Schneider S., Deuss A. // *Geophysical Journal International*. **225**. 329. (2021).

## Estimation of frequencies and Q-factors of Earth's low-frequency toroidal normal modes using strain data

A.E. Olshansky, M.P. Vinogradov<sup>a</sup>, V.K. Milyukov

*Sternberg Astronomical Institute, Lomonosov Moscow State University Moscow 119234, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>vinogradovmp@my.msu.ru*

In the study, estimations of the parameters of three low-frequency toroidal modes  ${}_0T_2$ ,  ${}_0T_3$ , and  ${}_0T_4$ , excited by the 13 largest earthquakes of the 21st century, were carried out. The estimations were obtained using the data from the Baksan Laser Interferometer–Strainmeter of SAI MSU. Using an adaptive spectral algorithm, estimates of the modes' frequencies were obtained, and they were compared with the PREM model. Significant deviations in the frequency estimates of the  ${}_0T_4$  mode for a series of earthquakes were found, showing their possible connection with local inhomogeneities in the values of the speed of shear waves and the Earth's density in the upper mantle. The splitting of the  ${}_0T_2$  mode due to Earth's ellipticity and rotation was studied, with frequency estimates of singlets excited after catastrophic earthquakes in Sumatra, Japan, and Chile obtained. An evaluation of the Q-factors of the low-frequency toroidal modes was performed using three different methods.

PACS: 91.35.-x.

*Keywords:* Earth's free oscillations, toroidal modes, splitting, Q-factor of the mode, earthquakes, laser interferometer-strainmeter.

*Received 26 June 2023.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 5, pp. 697–705.

### Сведения об авторах

1. Ольшанский Андрей Евгеньевич — студент; e-mail: [olshanskii.ae17@physics.msu.ru](mailto:olshanskii.ae17@physics.msu.ru).
2. Виноградов Михаил Петрович — вед. инженер ГАИШ МГУ; e-mail: [vinogradovmp@my.msu.ru](mailto:vinogradovmp@my.msu.ru).
3. Миллюков Вадим Константинович — доктор физ.-мат. наук, зав. лабораторией; e-mail: [vmilyukov@yabdex.ru](mailto:vmilyukov@yabdex.ru).